

21 世纪电子电气工程师系列

电工电路

双色

(日) 正田英介 主编
吉冈芳夫 编著

ART 21
电子电气工程师

科学出版社 OHM 社

TM13

62

21 世纪电子电气工程师系列

电工电路

〔日〕正田英介 主编 吉冈芳夫 编著
刘冬梅 译
刘正兴 王 辉 校



北方工业大学图书馆



00499364

科学出版社 OHM 社

2001 北京

21世纪电子电气工程师系列

电工电路

(日) 正田英介 主编
吉冈芳夫 编著

双色

ART21
电子电气工程师

科学出版社 OHM社

图字:01-2000-4327 号

Original Japanese edition

Arute 21 Denki Kairo

by Yoshio Yoshioka

Copyright © 1997 by Yoshio Yoshioka

Published by Ohmsha, Ltd.

This Chinese language edition is co-published by Ohmsha, Ltd. and Science Press.

Copyright © 2001

All rights reserved.

本书中文版版权为科学出版社和 OHM 社所共有

アルテ21

電気回路

吉岡芳夫 オーム社 1997

图书在版编目(CIP)数据

电工电路/[日]吉岡芳夫编著;刘冬梅译.-北京:科学出版社,2001

(21世纪电子电气工程师系列/[日]正田英介主编)

ISBN 7-03-009559-6

I. 电… II. ①吉… ②刘… III. 电工电路 IV. TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 039756 号

北京东方科龙电脑图文制作有限公司 制作

科学出版社 OHM 社 出版

北京东黄城根北街 16 号 邮政编码:100717

中国科学院印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

2001 年 8 月第 一 版 开本:A5(890×1240)

2001 年 8 月第一次印刷 印张:6 3/4

印数:1—5 000 字数:207 000

定 价:19.50 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

主编的话

当今,电子设备已广泛应用于国民经济的各个领域。为了用好这些电子设备,科技人员必须掌握电子技术方面的有关知识。目前,电子技术的应用领域也在迅速扩展,人材需求量很大的状况一直没有改变。因此对电子工程专业的毕业生有必要从应用的角度进行二次培训,也有必要为非电专业的技术工作者学习电气电子技术的基础知识创造更多的机会。

为了适应这一形势的需要,组织编写了“21 世纪电子电气工程师系列”丛书,目的是要编写一套全面系统介绍电子电气专业基础知识的,既适用于企业技术人员培训,也适于非电专业技术人员阅读的新型教科书。丛书编委都是在日本有名的电子电气企业中长期从事职工教育培训的专家,丛书结构及各册内容均由编委会讨论决定。

本套丛书的特点首先表现在教材内容紧密联系实际。通过产品和技术模型说明基础知识与产品、系统的关系,通过具体产品的结构和系统中所发生的现象说明其工作原理或理论。另外,本丛书的所有执笔者均为在相应企业中长期从事实际技术工作或从事职工教育工作的专家,所以,具有丰富的实际经验,书中的举例和例题都是他们多年工作经验的结晶。

此外,在电子技术的专业教学中,由于所涉及内容非常广泛,所以以往在对教学内容细化的同时常常忽略了对基础内容的充分消化。本丛书充分注意到了这一问题,从现象入手说明原理,从而保证了基础知识易学易懂,教材内容紧密联系实际。本丛书还可用于大专院校的专业课教学。

由于受产业全球化和社会环境的影响,21 世纪的工程学科必将会发生巨大的变化。读者通过对本套丛书的学习,可以对新时代的电子技术知识有较系统的了解,并在各种领域的产品和系统的革新中充分发挥自己的聪明才智。

东京理科大学教授,工学博士

正田英介

21 世纪电子电气工程师系列

编辑委员会

主 编 正田英介（东京大学）

编 委 楠本一幸（株式会社东芝）
島田 弥（三菱电机株式会社）
高木正藏（东芝综合人材开发株式会社）
常深信彦（株式会社日立制作所 日立京滨工业专科学院）
丹羽信昭（东京电力株式会社 东电学园）
春木 弘（株式会社富士电机能力开发中心）
吉冈芳夫（株式会社日立制作所）
吉永 淳（福井工业大学 前三菱电机株式会社）

执 笔 吉冈芳夫（（株）日立制作所）
矶贝裕久（关东学院大学）
木内贞男（东京电力（株）东电学园）
山崎泰广（（株）日立制作所 日立京滨工业专科学院）
山内 力（东芝综合人材开发（株）东芝学园）
田冈久雄（三菱电机（株））

前 言

无论是电力的产生和利用,还是电类产品的设计与测量,都离不开电路的计算。本书在内容组织上以实际中出现的电路为基础,注重实用性,在表述上力求准确详细,深入浅出。本书不仅是一本启发和培养学生思考问题、解决实际问题能力的教科书,也是非电气专业技术人员用于提高自身理论水平与业务能力的参考书。

本书的内容具体安排如下:

第1章从电路的元件及构成入手,阐述了电路的基本定律——欧姆定律与基尔霍夫定律。

第2章运用第1章中所学定律,进行直流电路的计算。通过这两章的学习,读者能够掌握电路的基本计算。

第3章介绍交流电路的瞬时值、有效值、相位等概念。

第4章引入三相电路,介绍电路的各种计算方法,电气领域的工程技术人员可从中学习到业务上不可欠缺的知识。

第5章主要介绍一些方便于计算的定理,学习这些定理不仅可以更好地了解电路的特性,还可使计算化繁为简。

第6章可学习失真波的有关知识。随着电源-半导体的普及,电路中的电压波形出现了失真现象。我们知道失真波中含有各高次谐波,对于使用变换器和断路器的技术人员来说,通过本章的学习,定会对他们的工作有所帮助。

第7章中所介绍的四端子网络在变压器电路中应用极为广泛。即使不明输入端与输出端之间的电路内部结构,也可通过四端子网络求出两者关系。掌握这种方法,就可使电路的计算上一个台阶。

第8章讨论实际出现的一些过渡现象。电路中的过渡现象多种多样,但只要建立基本的电路方程式,就可进行电路的计算。不过,对于较为复杂的电路,其计算非常繁琐,本章介绍的拉普拉斯变换则可使复杂电路中过渡现象的计算问题迎刃而解。

本书各章的执笔者为：第 1、2 章吉冈芳夫，第 3 章矶贝裕久，第 4 章由木内贞男，第 5、6 章山崎泰广，第 7 章山内力，第 8 章田冈久雄。

学习本书时，从第一章开始就对全书进行通读，效果会比较好。不过，为了方便各类读者，本书配备了丰富的例题，因此掌握了电路基础的读者也可以单独学习其他部分。

期待着本书能对学习电路的读者有所裨益。

吉冈芳夫



电工电路

内 容 简 介

“21世纪电子电气工程师系列”是企业技术/管理干部知识更新用新型教科书。丛书特点是重视理论联系实际，用现象说明原理。反映该专业领域最新进展，通过产品与技术模型揭示学科基础知识。丛书各册执笔者均是在国际知名企业中长期从事技术、教育工作的专家。书中举例及例题均源于他们多年的工作实践。

本书主要内容包括电路的元件和联接、直流电路、交流电路、三相交流电路、电路定理、失真交流波，以及四端网络、过渡现象等。

本书可作为企业工程技术人员培训的专用教科书，也可供高等学校相关专业及高、中等职业学校相关专业师生学习参考。

编著者简介

正田英介

1965年 东京大学研究生院数理系博士
毕业

1965年 获工学博士

现 在 东京大学工学部电气工程专业
教授

吉冈芳夫

1959年 大阪大学理学部物理专业毕业

1973年 获工学博士

现 在 株式会社日立制作所国分工厂
技术顾问



北京东方科龙图文制作有限公司 制作

www.okbook.com.cn

(TM-0067.0101)

责任编辑 赵丽艳 樊友民

责任制作 魏 谨

封面制作 李 祥



21 世纪电子电气工程师系列

电磁学

自动控制

模拟电路

信息处理

电力系统

半导体器件

接地技术与接地系统

电力电子学

数字电路

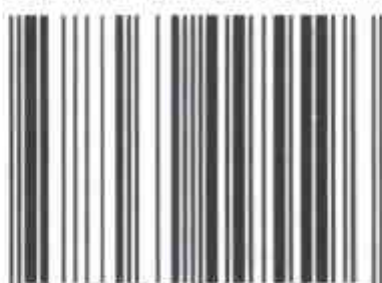
电机电器

通信技术

电工电路

图像电子学

ISBN 7-03-009559-6



9 787030 095596 >

ISBN 7-03-009559-6/TM · 67

定 价：19.50 元

目 录

第 1 章 电路的元件和联接

1.1 电路的元件构成及其联接	1
1.1.1 电路的元件	1
1.1.2 电路元件的联接	5
1.1.3 电路的种类、稳定状态及过渡现象	6
1.2 电路的基本定律	7
1.2.1 电路计算的基本定律	7
1.2.2 电路元件中的串联和并联	10
1.2.3 不能简化的联接(桥式联接)	14
练 习 题	14

第 2 章 直流电路

2.1 由直流电源和电阻构成的电路计算	17
2.1.1 简单电路	17
2.1.2 一般电路	18
2.1.3 桥式电路的计算	20
2.2 含有电容的直流电路的计算	25
2.3 含有电感的电路	26
练 习 题	28

第 3 章 交流电路

3.1 交流电的电压和电流	31
---------------	----

3.2	广泛使用交流电的原因	32
3.3	交流电的发电原理	34
3.4	交流电压、电流和功率	36
3.5	功率因数	38
3.6	稳定状态和过渡状态	40
3.7	相量图	42
3.8	复数运算、阻抗、电抗	43
3.9	交流电路的计算方法	45
3.9.1	R 电路	45
3.9.2	RL 电路	46
3.9.3	RC 电路	52
3.9.4	RLC 电路	54
3.9.5	互感电路	57
练 习 题		59

第 4 章 三相交流电路

4.1	三相交流电	61
4.1.1	三相交流电的概念	61
4.1.2	三相交流电的产生	61
4.1.3	可用三根线输电的原因	62
4.1.4	广泛应用三相交流电的原因	62
4.1.5	三相交流电的电压与电流	62
4.1.6	相序(或相旋转)	65
4.2	三相电路的联接	66
4.2.1	电源和负载的联接	66
4.2.2	Y 形接法时线电压与相电压、线电流与 相电流的关系	68
4.2.3	Δ 形接法时线电压与相电压、线电流与 相电流的关系	70
4.2.4	V 形接法时线电压与相电压、线电流与	

相电流的关系	71
4.2.5 错连时产生的后果	72
4.3 对称三相电路的计算	73
4.3.1 电源与负载联接相同时电流的计算	73
4.3.2 电源与负载联接不同时电流的计算	76
4.4 三相电路的功率	80
4.4.1 三相电路功率的计算	80
4.4.2 三相电路功率的测量	81
4.5 不对称三相电路的计算	83
4.5.1 不对称Y-Y电路的计算	83
4.5.2 不对称 Δ - Δ 电路的计算	85
4.6 三相电动机(旋转磁场的产生)	85
4.7 对称分量法的基础	88
练习 题	92

第5章 电路定理

5.1 电压源和电流源	95
5.1.1 电压源	95
5.1.2 电流源	96
5.1.3 电压源与电流源的等效变换	98
5.2 叠加定理	100
5.2.1 含电压源时的叠加	100
5.2.2 含电流源时的叠加	102
5.3 戴维宁定理	103
5.4 诺顿定理	105
5.5 补偿定理	107
5.6 最大功率传输定理	110
5.6.1 负载的电阻分量和电抗分量可变时	110
5.6.2 负载的电阻分量可变时	111
5.6.3 负载的大小可变但功率因数一定时	111

练习 题	113
------------	-----

第 6 章 失真交流波

6.1 傅里叶级数(或傅里叶展开)	117
6.1.1 直流分量的确定	118
6.1.2 a_n 的确定	119
6.1.3 b_n 的确定	120
6.2 典型的失真波形	120
6.2.1 无直流项的情况	120
6.2.2 对称波	121
6.2.3 奇函数波	122
6.2.4 以横轴交点为对称点的梯形对称波	123
6.2.5 偶函数波	124
6.3 特殊波的例子	125
6.3.1 方 波	125
6.3.2 有 0 区间的方波	126
6.3.3 半波整流波	128
6.3.4 全波整流正弦波	129
6.4 失真波的有效值、功率及功率因数和失真率	130
6.4.1 失真波的有效值	130
6.4.2 失真波的功率	131
6.4.3 失真波的功率因数	133
6.4.4 等效正弦波	134
6.4.5 失真率、波形率、波高率、波动率	135
6.4.6 失真交流电路的计算	136
6.5 波形分析	138
练习 题	139

第 7 章 四端子网络

7.1 四端子网络的定义	141
--------------------	-----

7.2	Z 参数	143
7.3	Y 参数	145
7.4	h 参数	148
7.5	F 参数	151
7.6	四端子网络的连接	155
7.6.1	级联与 F 参数	155
7.6.2	串联与 Z 参数	156
7.6.3	并联与 Y 参数	157
	练习题	161

第 8 章 过渡现象

8.1	各种过渡现象	163
8.2	过渡现象的微分方程式	165
8.2.1	直流电路的电路方程式	165
8.2.2	交流电路的电路方程式	166
8.2.3	微分算子	166
8.3	拉普拉斯变换	168
8.3.1	拉普拉斯变换的定义	168
8.3.2	基本的拉普拉斯变换	168
8.4	拉普拉斯变换的应用	172
8.4.1	简单电路的分析	172
8.4.2	传递函数和方框图	173
8.5	分布参数电路	175
8.5.1	分布参数电路的定义	175
8.5.2	基本的分布参数电路	177
8.6	电磁过渡现象	178
	练习题	180
	练习题解答	183

第 1 章 电路的元件和联接

本章主要讨论电路的元件、元件的联接及电路的构成等电气电路的基本问题。

1.1 电路的元件构成及其联接

● 1.1.1 电路的元件

本章将讨论一个完整的电路。首先,电路是由相互联接起来的电气元件构成的。电路中有作为能源的电源,能源从电源处发出,经过电路中各元件最后输送给负载。电分交流和直流两种。在交流的情况下,有时元件可以不用电线联接,把它们直接放入交变的磁场就可产生电流。电流可能是从一条通路流过,但更一般的情况则是从错综复杂的像道路网一样的回路中流过。

在电路中作为能源的电源,从大的范围可分为直流电源和交流电源两种。前者一般是指电池或者经过整流的直流电源;交流电源常常可以很容易的从办公室、工厂的配电器、家庭的电源盒得到。根本上说,从电力公司发电所的交流发电机上获取的是交流电。交流电又可以细分为单向交流电、三向交流电和多向交流电。一般而言,电灯用的是单向交流电,而动力电路中常常使用三向交流电。

另外,还有一些元件接上电源后会有电流通过,它们或储存能量,或消耗能量。它们包括电阻元件 R 、电感元件 L 、电容元件 C 、二极管以及变压器等。

1 电阻元件

在那些具有固定阻值的金属材料、炭精棒或陶瓷等物体的两端接上导线,就构成了电阻。如图 1.1(a)所示,其在电路中的图形符号如图 1.1(b)

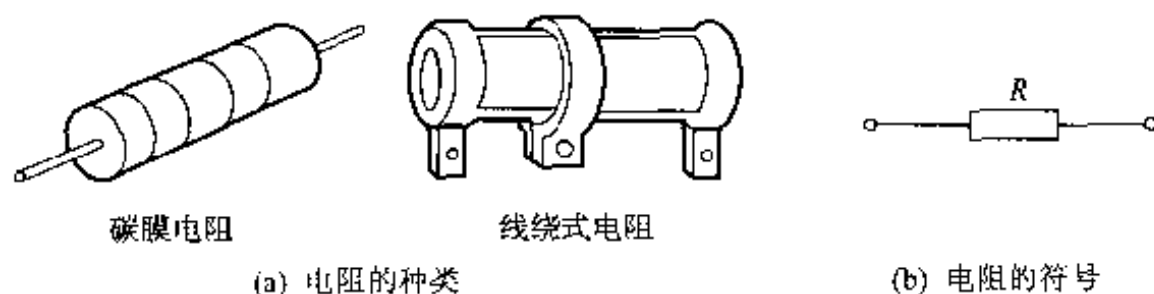


图 1.1 电 阻

所示,单位用 $[\Omega]$ (欧[姆])表示。

电阻中有电流流过时,它的两端就会产生电压,大小为

$$V = IR \quad (1.1)$$

电压 V 的单位是 $[V]$ (伏[特])。电阻消耗电能转换为热能,消耗的功率为

$$P = V \cdot I = R \cdot I^2 \quad (1.2)$$

P 的单位是 $[W]$ (瓦[特])

2 电容元件

用箔状的电极把大面积的薄绝缘板或塑料薄板卷起并在电极的两端接上接线柱,就构成了电容,如图 1.2(a)所示。电容具有传递交流电流,储存电能的作用。电容在电路中的图形符号如图 1.2(b)所示。

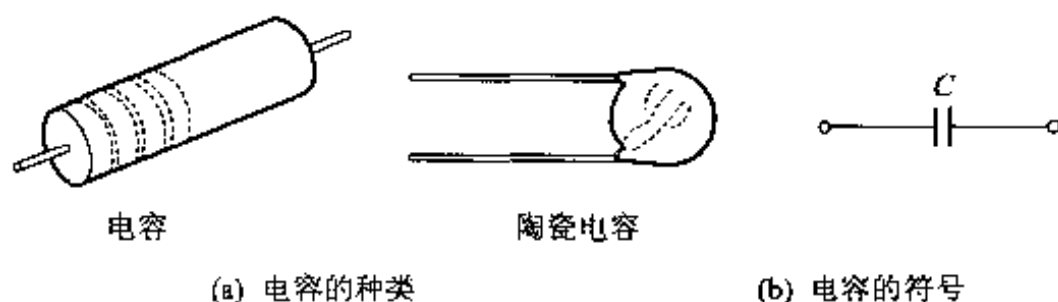


图 1.2 电 容

电容量的单位用 $[F]$ (法[拉])表示,大小为

$$C = \epsilon \frac{S}{d} [F] \quad (1.3)$$

式中, ϵ 为绝缘板的电容率(介质常数) $[F/m]$; S 为电极的面积 $[m^2]$; d 为电极间距离 $[m]$ 。

当电容中流过电流为 I ，流经时间为 Δt 时，电容的端电压就会增加 ΔV ， $\Delta V = \Delta t \cdot \frac{I}{C}$ 。一般情况下，

$$\frac{dV}{dt} = \frac{I}{C} \quad (1.4)$$

因此，电容的端电压为

$$V = \frac{1}{C} \int I \cdot dt = \frac{Q}{C} \quad (1.5)$$

式中， $Q = \int i dt$ 是电容中储存的电荷量。

当电容的电压为 V 、流过电流为 I 的瞬间，其功率是

$$P = V \cdot I = V \cdot C \frac{dV}{dt} \quad (1.6)$$

此时，储存在电容中的能量 $W_c [J]$ （焦[耳]）为

$$W_c = \int p dt = \int CV \frac{dV}{dt} dt = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} CV^2 \right) dt = \frac{1}{2} C \cdot V^2 \quad (1.7)$$

3 电感元件

把电线绕成线圈如图 1.3(a) 所示，当电流通过时，其内侧会产生磁通，这就构成了电感。线圈的始端和末端就是电感的两个接头。电感是当流经线圈的电流发生变化时能够显示出电阻特性的电路元件，其图形符号如图 1.3(b) 所示，单位用 $[H]$ （亨[利]）表示。若用 $\phi [Wb]$ （韦[伯]）表示交链线圈中的磁通，则

$$\phi(t) = L \cdot I(t)$$

设电感的端电压为 V ，电流的变化为 $\frac{dI}{dt}$ ，则

$$V = \frac{d\phi}{dt} = L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (1.8)$$

当线圈中有电流流过时，电感产生的功率为

$$P = V \cdot I = L \cdot I \frac{dI}{dt}$$

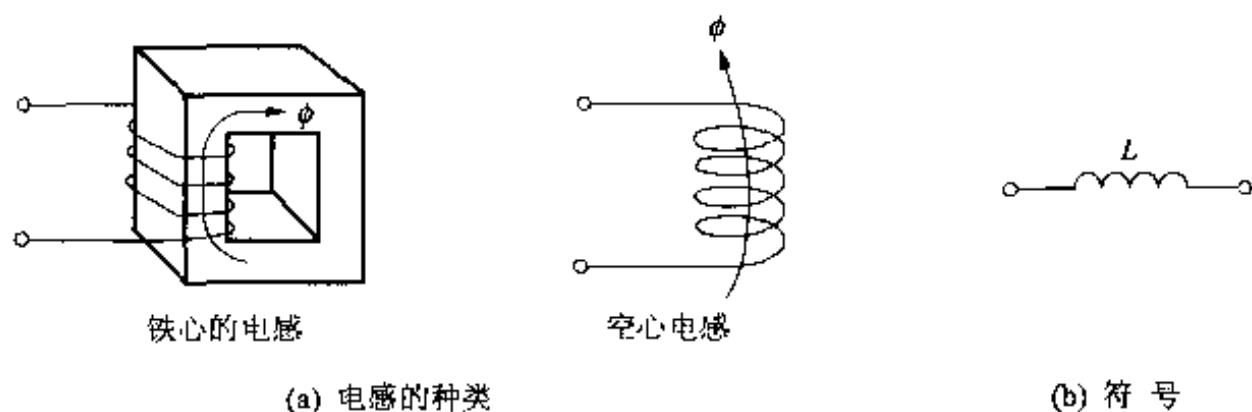


图 1.3 电 感

因此,储存在线圈中的能量为

$$\begin{aligned}
 W_f(J) &= \int P dt = \int LI \frac{dI}{dt} = \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \cdot LI^2 \right) dt \\
 &= \frac{1}{2} L \cdot I^2
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

4 非线性电阻元件

如果一个电阻表现正常,其阻值应该是随温度或电流而变化的,非线性电阻元件阻值的变化则尤其显著。由 SiC(碳化硅)、ZnO₂(二氧化锌)等陶瓷材料做成的电阻,当通过的电流变化时,电阻值迅速降低;随着电流的通过,电阻因发热而温度上升时,阻值又会急剧增大。

这类电阻,一般称为非线性电阻。流过大电流时,电阻值变小的非线性电阻可以保护电路,使其避免因打雷而产生的高电压的危害。

本书不讨论含有非线性电阻元件的电路。

5 变压器

在交流电路中,可以使用变压器来随意改变电压或电流的大小。变压器与线圈相似,如图 1.4(a)所示,在同一个铁磁心中,有匝数不同的两组线圈,这两组线圈分别称为一次端(初级端)与二次端(次级端),有共同的磁通 Φ 通过变压器用图 1.4(b)的符号表示。

一次端与二次端的匝数表示为 n_1 、 n_2 ,理想变压器的一次端电压 V_1 与二次端电压 V_2 之间的关系为

$$V_1 = \frac{n_1}{n_2} V_2 \tag{1.10}$$

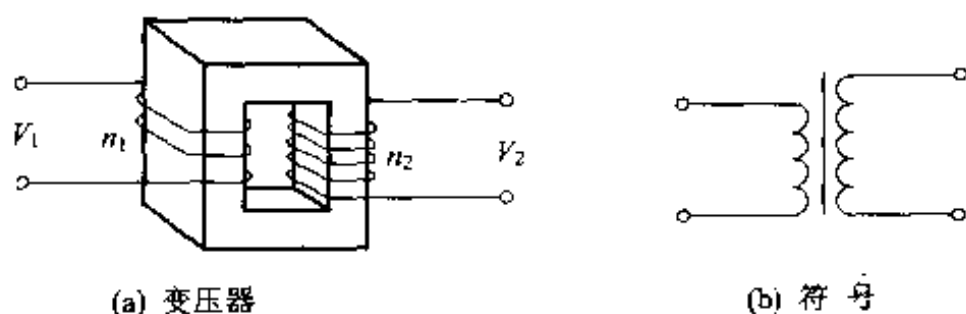


图 1.4 变压器

电流的关系为

$$I_1 = \frac{n_2}{n_1} I_2 \quad (1.11)$$

变压器的一次端和二次端并不是由电线联接,它们是通过它们的共同磁通联接在一起的。因此,变压器除了用来改变交流的电压、电流之外,还用来隔离两个电路。

6 其他的电路元件

二极管是一种当电流方向改变时表现出不同向的电阻值有很大差异的电路元件,利用此性能,它可用在把交流电转换成直流电的整流电路中。

另外,因其具有逆向导电性,因此当阻值超过某一值时会急剧增加。利用这种特性,可以将电路中的电压维持在一个定值。

这类二极管称为齐纳二极管。

电路中,除这些元件外,还有晶体管、晶闸管等。关于这些元件的性质,请参阅本书系列之一《电磁学》。

1.1.2 电路元件的联接

电路元件联接起来就构成了电路。图 1.5 表示了元件的一些联接方法。

把几个电路元件首尾联接起来的方法称为**串联**;把元件的相同端联接起来称为**并联**。而把四个元件先通过串、并联联接起来,然后把中间的部分像“桥”一样联接,这种方法称为**桥式联接**。变压器这类电路元件的初级端有两个端子,次级端有两个端子,若把中间线圈的部分当作一个黑盒子,那么它的两个端口各有两根联线,总共要联接四根线,所以叫做**四端子(电路)**

联接。

接有二极管的电路是整流电路,接有晶体管的是放大电路。

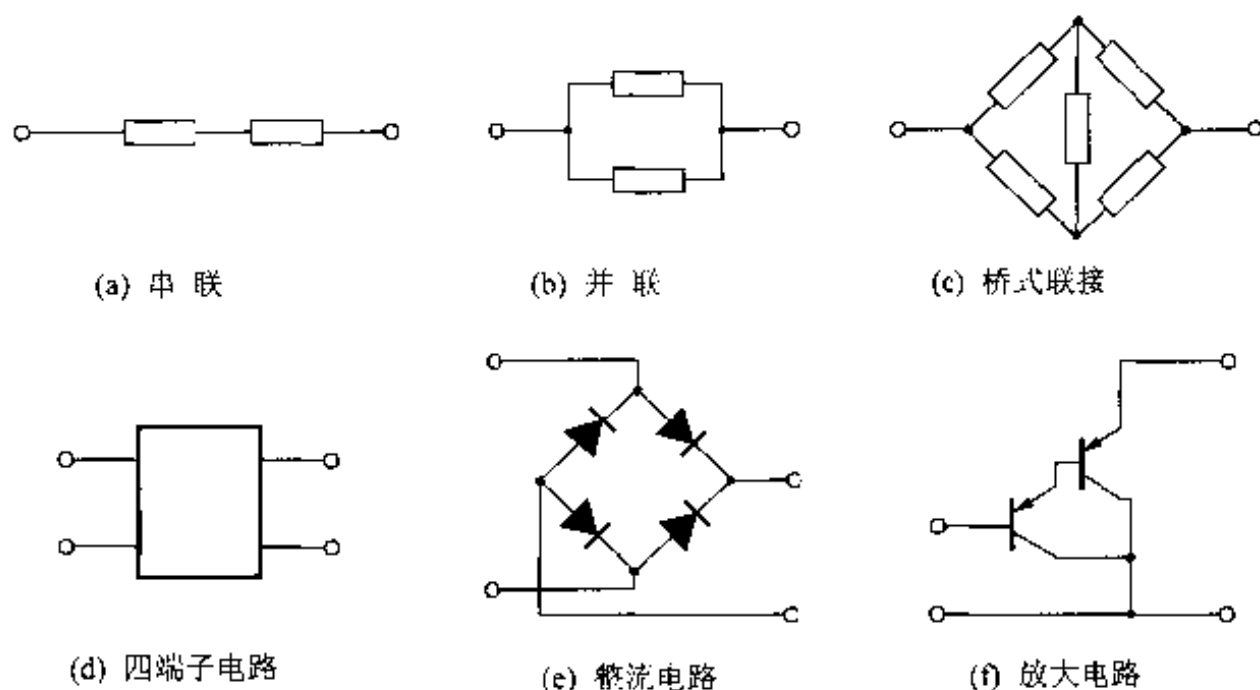


图 1.5 电路的联接方式

● 1.1.3 电路的种类、稳定状态及过渡现象

联接好电路元件,接入电源便构成了电路。众所周知,电源包括直流电源和交流电源。以电池为电源的电路是直流电路。电路中流过的电流处于稳定状态,它不随时间变化。但是接有电容或电感的直流电路,在闭合开关时电流的值会不断变化,最后达到一个稳定值。这种现象叫做过渡现象。

在交流电路中,因为电源的电压发生周期性变化,所以电路中的电流也以相同周期变化着。不过,观察电流或电压的波峰值或平均值,就会发现在稳定状态下这些值都是相同的。在交流电路中,也会讨论这种状态下的各种电气参数,而且在交流电路中当把电源接入电路中的瞬间也会发生过渡现象。实际上,过渡现象经常引发问题,造成危害。当然,有时候也可以积极地利用过渡现象。

有关过渡现象的详细知识,本书将在第 8 章讨论。

无形的电路元件

前面提到的电路元件,全都是有形的元件,实际上还经常有一些无形的电路元件。

△无形的电阻

通常作为导体的电线,当电线很细或当温度上升时,有些情况下其电阻是不能被忽视的。若电线的横截面积为 $S(\text{m}^2)$,电线材料的固有电阻率为 $\rho[\Omega \cdot \text{m}]$,那么电线的电阻 $R[\Omega]$ 的大小为

$$R = \rho \frac{l}{S}$$

△无形的电容

把两个电极对放,它们之间就会产生静电。输电电线在构造上与电容非常相似。数公里长的两根电线之间所夹的面积非常大,所以它们构成的电容不可忽视。即使电线两端的开关处于关闭状态,平行带电状态的输电线是和电容相联接的,它们仍会诱发高电压。

△无形的电感

由导线联接元件的电路中,由于导线围成了一个有一定面积大小的空间,这个空间中就会产生磁通。架设长距离的输电线时,电线和电线之间能够储存相当多的磁通,这就是眼睛看不到的电感。虽然在三相交流电中其中一根线的两端接地,但是当另外两根输电线中有电流流过时,此电线对地会发生交链磁通,从而引发大电流。即使不是电力电路,但对于那些频率比较高的电路,在计算时,也应该考虑这些看不到的电路元件。

1.2 电路的基本定律

● 1.2.1 电路计算的基本定律

电路的计算就是计算流过电路中各元件的电流大小和元件上分配的电压,计算元件中储存的能量及求能量消耗的多少。

电路计算中常用到以下三个定律:

- ① 欧姆定律
- ② 基尔霍夫第一定律(电流定律)
- ③ 基尔霍夫第二定律(电压定律)

1 欧姆定律

欧姆定律在直流、交流电路中都成立。当电阻 $R[\Omega]$ 中流过的电流为 $I[\text{A}]$ 时,电阻上的电压为

$$V=I \cdot R \quad (1.12)$$

这就是欧姆定律。

对于直流电路 $V=I \cdot R$, 对于交流电路来说, 其表达式为

$$\dot{V}=\dot{i} \cdot Z \quad (1.13)$$

其中 Z 为阻抗, 相当于直流电路中的电阻。

需要指出的是表达式中的 $\dot{V}$ 、 $\dot{i}$ 、 Z 是相量, 它们不仅表示了 V 、 I 、 R 的大小, 也表示了交流电的相位情况, 详见第 3 章。

电路计算时, 还常常用到电阻 R 的倒数 G (电导), 电导表示电流通过的难易程度, 其单位为 $[S]$ (西[门子])。

$$G(S)=\frac{1}{R}[\Omega] \quad (1.14)$$

交流电路中的电阻

直流电路中, 电阻就是所说的电阻器, 交流电路中的电感、电容等元件就相当于直流电路中的电阻:

$$\text{电感} \quad Z=j\omega L$$

$$\text{电容} \quad Z=1/j\omega C$$

ω 代表交流电的角频率, j 是复数, 与交流电的相位有关 (详见第 3 章)。当讨论交流电的有效值时, 对于只含有 L 或 C 的电路, 可以用电阻置换 ωL 和 $1/\omega C$ 。也就是说, 交流电路的欧姆定律的表达式为

$$\dot{V}=\dot{i} \cdot j\omega L$$

或

$$\dot{V}=\dot{i} / j\omega C$$

注意: 同时联接有电感、电阻、电容的电路, 其计算比较复杂 (详见第 3 章)。

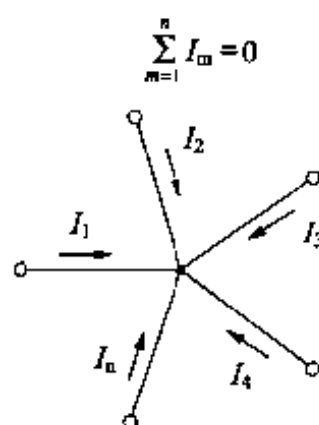


图 1.6 基尔霍夫电流定律

2 基尔霍夫第一定律 (电流定律)

基尔霍夫第一定律 (也称为电流定律) 的内容是: 电路中流过某一节点的电流总和为零。对图 1.6 来说, 有

$$I_1 + I_2 + I_3 + \cdots + I_n = 0 \quad (1.15)$$

基尔霍夫第一定律和下面要论述到的第二定律结合起来, 常常用来计算电路中电流的大小。

【例 1.1】 计算图 1.7 中的未知电流 I 。

解 设流入节点的电流方向为正,由基尔霍夫第一定律可知

$$5+3-2-1+I=0$$

$$I=-5\text{A}$$

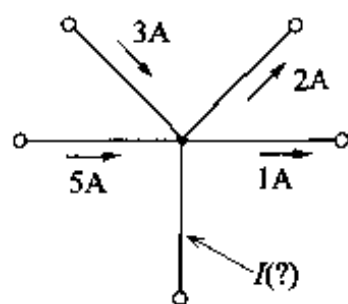


图 1.7

3 基尔霍夫第二定律 (电压定律)

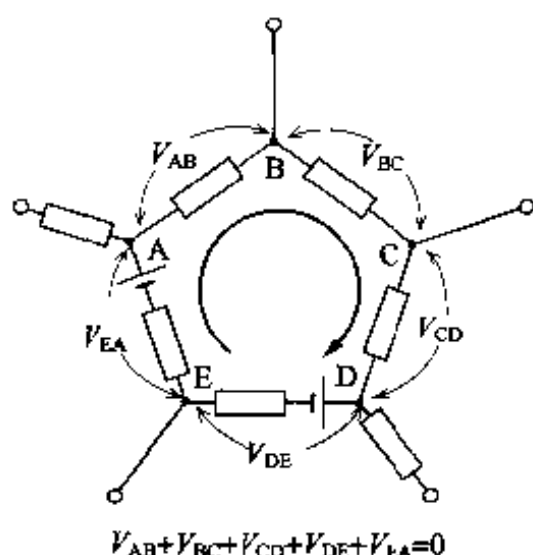


图 1.8 基尔霍夫电压定律

基尔霍夫第二定律的内容是:对于电路网络中的任何一个闭合回路,沿回路绕行一周,此回路上的电压总和为 0。

当电流流过电池电源和回路中元件时,回路中的电压就会降低,产生电压降。对于图 1.8 而言,从节点 A 开始,按顺时针方向绕行一周,形成 ABCDEA 闭合电路,流过 AB、BC、CD、DE、EA 各支路的电流大小不同。从 A 点出发,沿顺时针方向绕行时,令电源及各支路上的电压降的方向为由正到负,那么把闭合电路中的电压

加起来后总和为零,即

$$V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DE} + V_{EA} = 0 \quad (1.16)$$

这是根据基尔霍夫第二定律建立起来的方程式。此定律对于回路的计算非常重要,下面就通过例题来加深理解。

【例 1.2】 图 1.9(a)中有 ABEFA 和 BCDEB 两个闭合回路,应用基尔霍夫第二定律建立闭合回路的方程式。

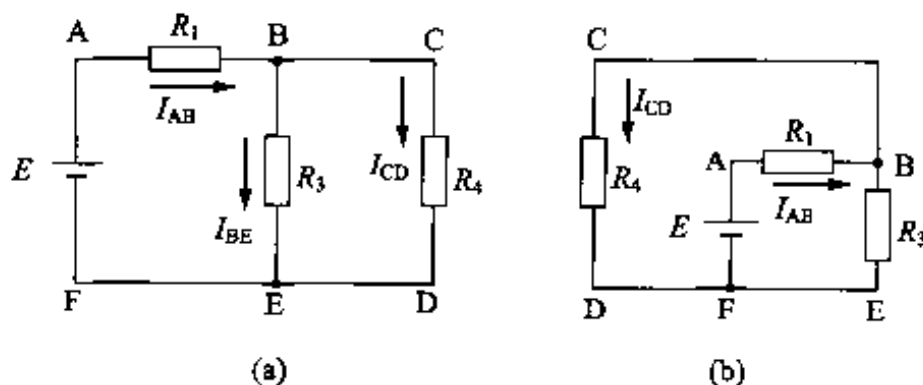


图 1.9

解 设顺时针为绕行方向,对闭合回路 ABEFA,其方程式为

$$R_1 \cdot I_{AB} + R_3 \cdot I_{BE} - E = 0 \quad (1.17)$$

对闭合回路 BCDEB,其方程式为

$$R_4 \cdot I_{CD} - R_3 \cdot I_{BE} = 0 \quad (1.18)$$

【例 1.3】 图 1.9(a)中还有一个闭合回路,此回路是什么? 请写出回路方程式。

解 此闭合回路为 ABCDEFA,从图 1.9(b)中看更为直观。回路方程式为

$$R_1 \cdot I_{AB} + R_4 \cdot I_{CD} - E = 0 \quad (1.19)$$

联立闭合回路的方程式求解,可求出流过各支路电流的大小。回路的计算将在第 3 章学习。下面,我们来讨论回路计算中的基本问题——电阻的合成。

● 1.2.2 电路元件中的串联和并联

利用欧姆定律和基尔霍夫第一、第二定律可以计算出复杂回路中的电流和电压的大小。在实际的电路中,为了调整电流或电压,经常使用电阻或电容等的串、并联组合。为了计算方便,一般用一个等价电阻或电容置换这些串联或并联起来的电阻或电容组合。

1 电阻的串联和并联

串联起来的总电阻等于这些电阻之和,也就是说,图 1.10 的合成后的电阻 R 为

$$R = R_1 + R_2 + \cdots + R_n \quad (1.20)$$

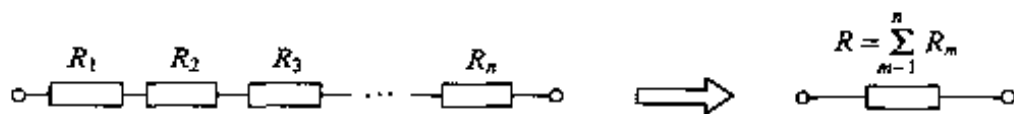


图 1.10 串联电阻的合成

并联后总电阻的倒数等于各电阻倒数之和。图 1.11 的总电阻 R 可以用下式表示:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \cdots + \frac{1}{R_n} \quad (1.21)$$

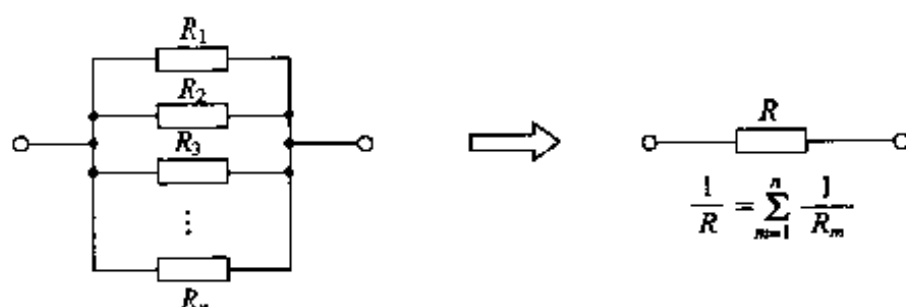


图 1.11 并联电阻的合成

既有串联,又有并联的电路,可以依次简化,最后化繁为简。

【例 1.4】求图 1.12 回路中的总电阻 R 。

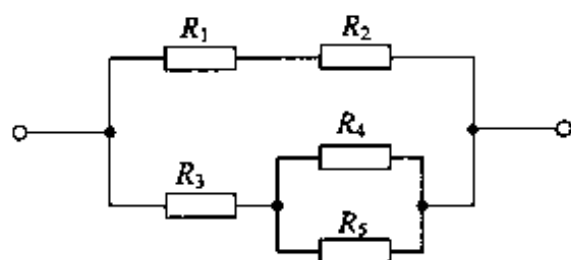


图 1.12

解 R_1 与 R_2 串联,故电阻 $R_6 = R_1 + R_2$

R_4 与 R_5 并联,故电阻 $R_7 = R_4 \cdot R_5 / (R_4 + R_5)$

R_3 与 R_7 串联,故电阻 $R_8 = R_3 + R_7$

又 R_6 与 R_8 为并联,所以整个电路的总电阻为

$$R = \frac{R_6 R_8}{R_6 + R_8} = \frac{(R_1 + R_2) \cdot [R_3 + R_4 R_5 / (R_4 + R_5)]}{(R_1 + R_2) + [R_3 + R_4 R_5 / (R_4 + R_5)]}$$

2 电容的串联和并联

电容的串、并联正好与电阻的串、并联计算相反。即,电容串联时,总电容的倒数等于各电容倒数之和,电容并联时,总电容等于各个电容之和。在图 1.13 和 1.14 中:

$$\text{串联时} \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n} \quad (1.22)$$

$$\text{并联时} \quad C = C_1 + C_2 + \cdots + C_n \quad (1.23)$$

串、并联混合时,其计算方法与电阻一样,可以通过简化,最后求出总静

电容量的值。

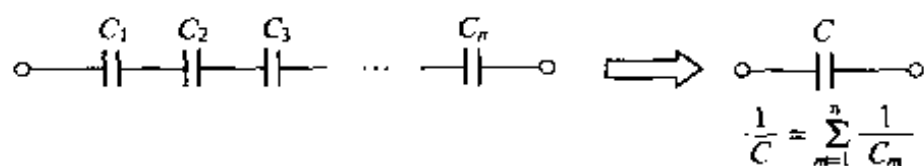


图 1.13 电容的串联

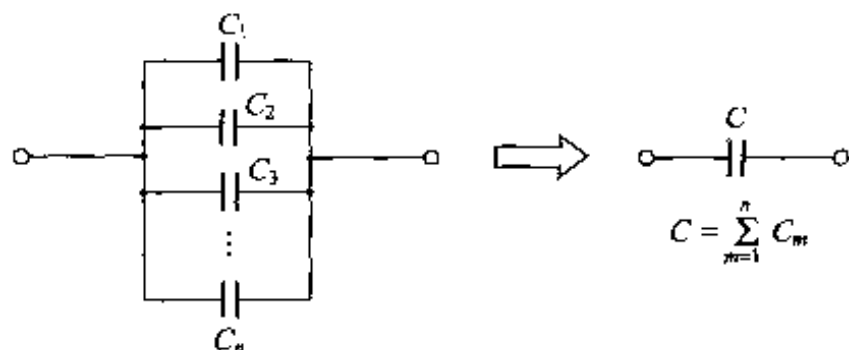


图 1.14 电容的并联

【例 1.5】 求图 1.15 中的总静电容量。

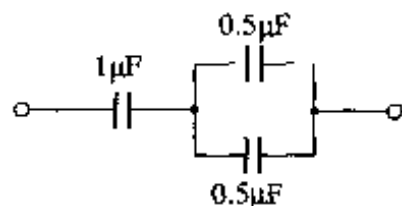


图 1.15

解 两个 $0.5\mu\text{F}$ 的电容并联后,大小为 $1\mu\text{F}$ 。而此 $1\mu\text{F}$ 的电容与电路中的 $1\mu\text{F}$ 电容串联,所以最后的总电容量为 $0.5\mu\text{F}$ 。

3 电感的串联和并联

电感的串、并联与电阻的串、并联的情形基本相同。图 1.16 中,串联后的总电感为

$$L = L_1 + L_2 + \cdots + L_n \quad (1.24)$$

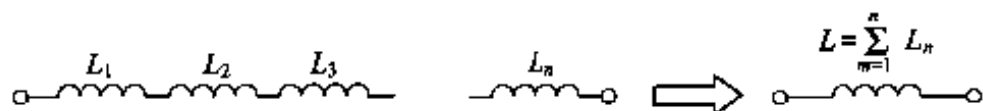


图 1.16 电感的串联

图 1.17 中,并联后的总电感的值可通过下式求得:

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_n} \quad (1.25)$$

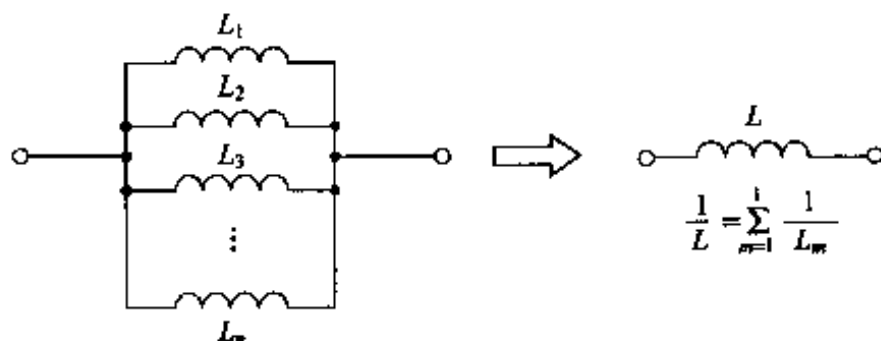


图 1.17 电感的并联

联接电感时需要注意的问题

电感中有磁通,而磁通有时会泄漏到外部,所以在联接电感时,一定要注意磁通的交链问题。交链与电感的构造、方向以及相互间的距离有关,特别是空心的螺线式的电感,磁通的泄漏比较严重。当这样的两段电感重叠或接近时,每个电感的值会发生变化,这一点需要注意。

无论电感的联接有多么复杂,最终都可以化简成基本的串、并联组合,一般来说,电感间的感应的大小用互感 M 表示,从而可以将电感间的影响用数学公式表示出来。

4 含有电阻、电容、电感的电路

电容或电感,在经历交流电路或直流电路的过渡状态时,会显露其特性。比如,电阻和电容并联时,在直流电路的稳定状态下,电容与流过电路的电流没有任何关系,但是,在达到稳定状态之前却与时间的变化有关系,在交流电路中,表示为复电阻 Z 。

本书将在第 3、4、8 章中讨论联接有 L 、 C 、 R 的回路的情况。

● 1.2.3 不能简化的联接(桥式联接)

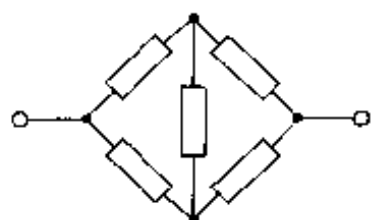


图 1.18 桥式电路

有些电路不能用电阻的串、并联简化，图 1.18 所示的桥式电路就是典型代表，利用欧姆定律、基尔霍夫定律可以计算出回路中的电流和电压，详见第 2 章。

►► 练习题

习题 1 _____

10Ω 的电阻中流过的电流为 10A 时，产生的热能为多少？

习题 2 _____

静电容量为 $1\mu\text{F}$ 的电容接上 100V 的电压时，此电容可储存多大的能量？

习题 3 _____

1mH 的电感中流过 10A 的电流时，电感储存的能量是多少？

习题 4 _____

求图 1.19 中 A-B 间的总电阻。

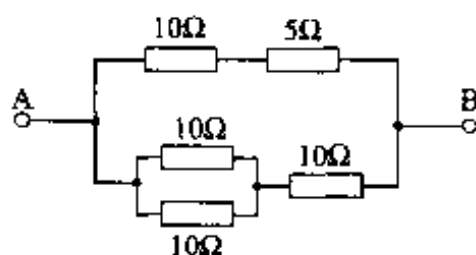


图 1.19

习题 5 _____

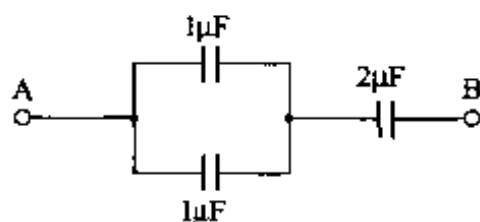


图 1.20

求图 1.20 中 A-B 间的静电容量。

习题 6

求图 1.21 中 A-B 及 B-C 间的总电阻。

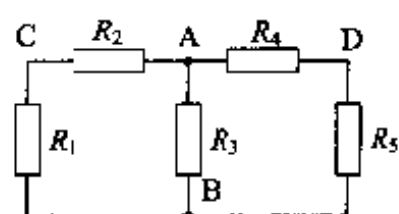


图 1.21

习题 7

求图 1.22 的梯形回路中 A-B 间的总电阻。

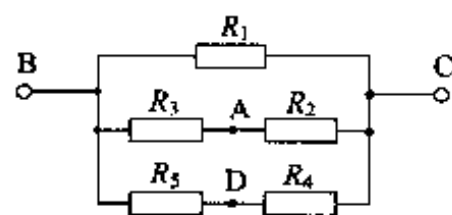


图 1.22

习题 8

求图 1.23 中 A-B 间的总电阻。

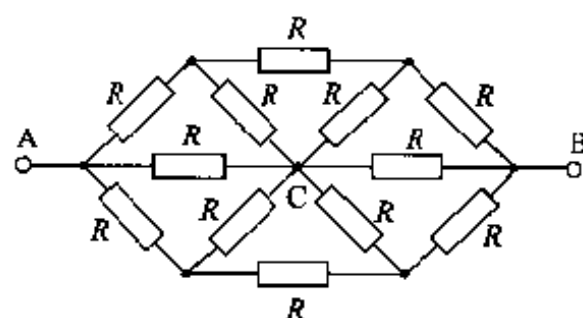


图 1.23

第 2 章 直流电路

本章着重讨论含有像电池这种不随时间变化的电源的电路。不随时间变化的电源也包括把交流电经过整流后得到的直流电源。在这种电路中,虽然电压稳定,但是在打开开关的瞬间,流过回路中的电流也会随时间变化,一段时间后才能达到稳定状态。这种现象称为过渡现象,对此我们将在第八章中学习。本章的目的只是了解和加深过渡现象的概念。

2.1 由直流电源和电阻构成的电路计算

● 2.1.1 简单电路

下面计算当电路中的电压为直流电压 V 时流过回路的电流及电压在各元件上的分配。

图 2.1(a)是最简单的电路。根据欧姆定律

$$E = I \cdot R \quad (2.1)$$

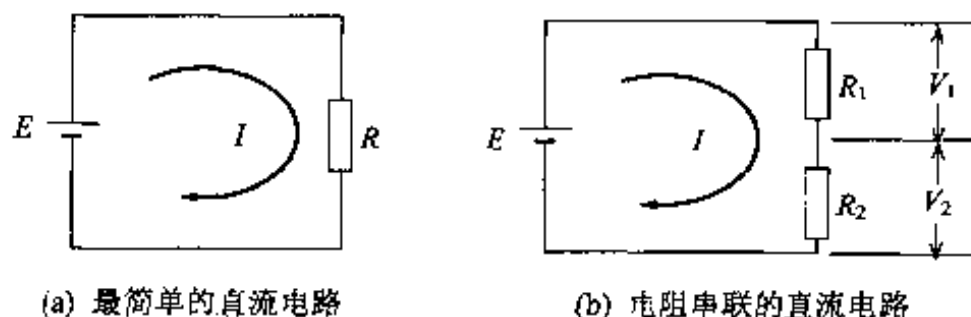


图 2.1

图 2.1(b)中,因电阻 R_1 与 R_2 串联,故此回路的方程式为

$$E = R_1 \cdot I + R_2 \cdot I = (R_1 + R_2) \cdot I = R \cdot I \quad (2.2)$$

即 $R = R_1 + R_2$, 由此可知, 对总电阻应用欧姆定律计算与对各个电阻分别应用欧姆定律计算, 其结果是一致的。

电阻 R_1 与 R_2 上的电压分别为

$$V_1 = R_1 \cdot I \quad (2.3)$$

$$V_2 = R_2 \cdot I \quad (2.4)$$

因为

$$E = V_1 + V_2 \quad (2.5)$$

所以

$$V_2 = [R_2 / (R_1 + R_2)] \cdot E \quad (2.6)$$

这就是用 100V 以下的测量仪器来测量高电压 V 的分压器原理。

● 2.1.2 一般电路

图 2.2 电路比前面所举的例子稍微复杂些。但是, 如果运用基尔霍夫第二定律(电压定律)仍可使计算简化。

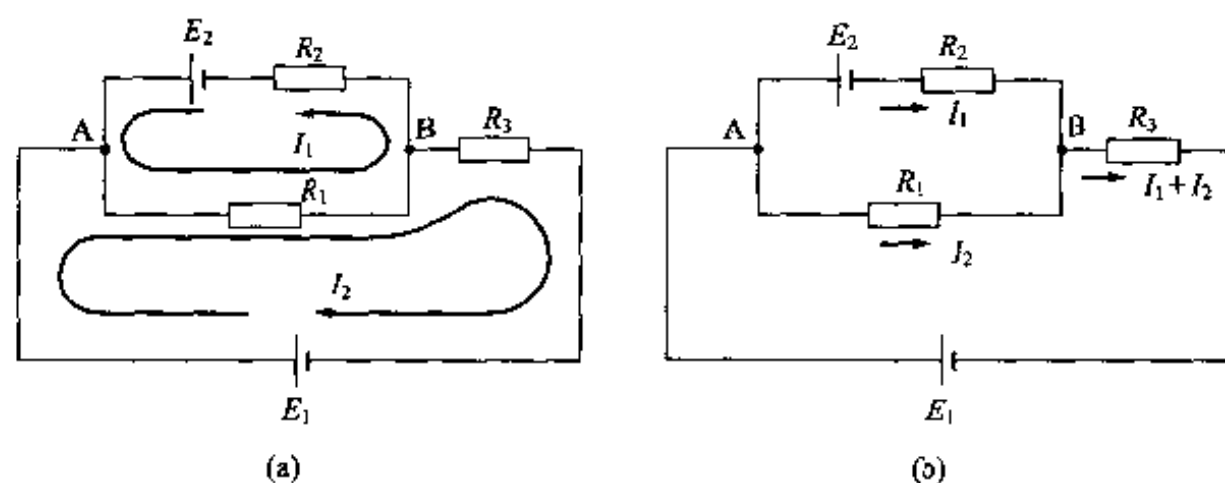


图 2.2

具体来说, 有两种方法: 回路电流法(电流流过每一个闭合电路, 以回路电流为电路的独立变量)和支路电流法(电流流过每个支路, 以支路电流为独立变量)。

1 网孔电流法

回路法就是以回路电流(也称为网孔电流)为待求变量。根据基尔霍夫定律对各回路建立方程式, 对电路进行分析的方法。在图 2.2(a)所示的电

路中,有两个闭合电路。设两个闭合电路电流分别为 I_1 、 I_2 。由基尔霍夫第二定律(电压定律)建立这两个闭合回路的方程式,则为

$$E_1 - R_1 \cdot (I_1 + I_2) - R_3 \cdot I_2 = 0 \quad (2.7)$$

$$E_2 - R_1 \cdot (I_1 + I_2) - R_2 \cdot I_1 = 0 \quad (2.8)$$

由式(2.7)知

$$I_2 = (E_1 - R_1 \cdot I_1) / (R_1 + R_3)$$

将上式代入式(2.8)可得

$$I_1 = [E_2 \cdot (R_1 + R_3) - R_1 \cdot E_1] / (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1) \quad (2.9)$$

$$I_2 = [E_1 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot E_2] / (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1) \quad (2.10)$$

2 支路电流法

用支路电流法求图 2.2 电路中的电流。

在图 2.2(b)中,设流过 E_2 的电流为 I_1 ,流过 R_1 的电流为 I_2 。因 A-B 间的电压降相等,故下列两个方程式成立:

$$E_2 + I_1 \cdot R_2 = R_1 \cdot I_2 \quad (2.11)$$

$$E_1 = R_1 \cdot I_2 + R_3 \cdot (I_1 + I_2) \quad (2.12)$$

由式(2.11),得

$$I_2 = (E_2 + R_2 \cdot I_1) / R_1$$

将上式代入式(2.12),得

$$I_1 = [R_1 \cdot E_1 - (R_1 + R_3) \cdot E_2] / (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1) \quad (2.13)$$

因此

$$I_2 = (R_2 \cdot E_1 + R_3 \cdot E_2) / (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1) \quad (2.14)$$

式(2.13)中的 I_1 与式(2.9)中的 I_1 符号相反,这是因为在图 2.2(b)中所设的支路电流方向与图 2.2(a)中的电流方向相反,实际上流过的电流是相同的。式(2.13)与式(2.14)相加得

$$I_1 + I_2 = [E_1 \cdot (R_1 + R_2) - R_1 \cdot E_2] / (R_1 \cdot R_2 + R_2 \cdot R_3 + R_3 \cdot R_1)$$

这与式(2.10)中的 I_2 是一致的。

综上所述,网孔电流法与支路电流法都可以求出电路中的电流,只是,对复杂的电路,用网孔电流法计算会比较简单。但如果是对称的电路,电流

比较容易确定时,使用支路电流法计算简单。

【例 2.1】 求图 2.3 桥式电路中的电流。

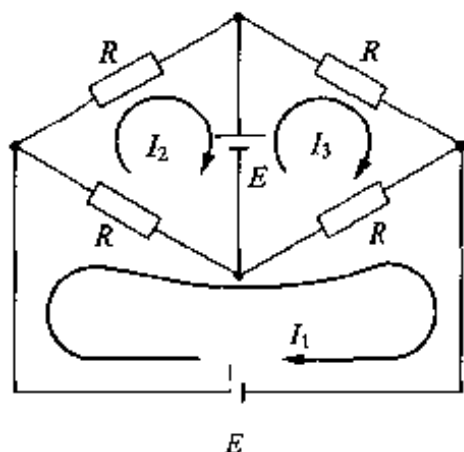


图 2.3

解 首先设各个网孔电流分别为 I_1 、 I_2 、 I_3 , 如图所示。对三个闭合回路建立方程式

$$R(I_1 - I_2) + R(I_1 - I_3) = E$$

$$R \cdot I_2 + R(I_2 - I_1) = -E$$

$$R \cdot I_3 + R(I_3 - I_1) = E$$

整理后为

$$2R \cdot I_1 - R \cdot I_2 + R \cdot I_3 = E \quad (2.15)$$

$$-R \cdot I_1 + 2R \cdot I_2 = -E \quad (2.16)$$

$$-R \cdot I_1 + 2R \cdot I_3 = E \quad (2.17)$$

由式(2.17)求得

$$I_3 = (E + R \cdot I_1) / 2R \quad (2.18)$$

由式(2.16)求得

$$I_2 = -E + R \cdot I_1 / 2R \quad (2.19)$$

把式(2.18)和式(2.19)代入式(2.15),得

$$I_1 = E/R$$

$$I_2 = -E + R \cdot E/R = 0$$

$$I_3 = E + R \cdot E/R / 2R = E/R$$

● 2.1.3 桥式电路的计算

一般来说,桥式电路的计算是相当繁琐的。在图 2.4 所示桥式电路中,

各支路的电阻具有对称性,我们来计算流过中央支路 AB 的电流 I_{AB} 。

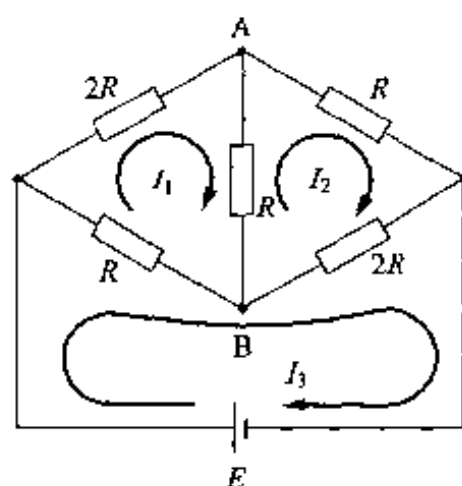


图 2.4

首先,如图所示,确立网孔电流,然后建立下面三个闭合回路的方程式:

$$4R \cdot I_1 - R \cdot I_2 - RI_3 = 0 \quad (2.20)$$

$$-R \cdot I_1 + 4R \cdot I_2 - 2RI_3 = 0 \quad (2.21)$$

$$3R \cdot I_3 - R \cdot I_1 - 2RI_2 = E \quad (2.22)$$

由式(2.20),得

$$I_3 = 4 \cdot I_1 - I_2$$

将上式代入式(2.21),得

$$I_2 = 3 \cdot I_1 / 2$$

把 I_3, I_2 代入式(2.22),得

$$I_1 = (2/7) \cdot E/R$$

$$I_2 = (3/7) \cdot E/R$$

所以

$$\begin{aligned} I_{AB} &= I_1 - I_2 = -(3/7 - 2/7) \cdot E/R \\ &= -(1/7) \cdot E/R \end{aligned} \quad (2.23)$$

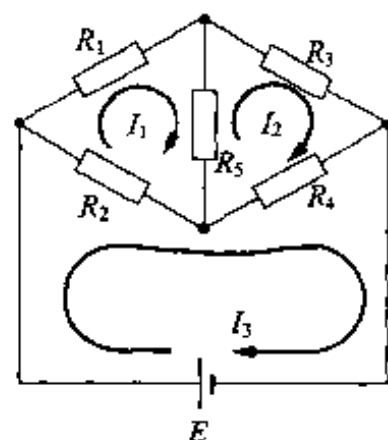


图 2.5

下面用网孔法计算图 2.5 中所示的真正的桥式电路中的电流。如图所示,设各闭合回路中的电流为 I_1, I_2, I_3 。和上面的例子一样,首先,运用基尔霍夫第二定律(电压定律)建立下面的三个方程式:

$$R_1 I_1 + R_5 \cdot (I_1 - I_2) + R_2 (I_1 - I_3) = 0 \quad (2.24)$$

$$R_3 I_2 + R_4 \cdot (I_2 - I_3) + R_5 (I_2 - I_1) = 0 \quad (2.25)$$

$$R_2 \cdot (I_3 - I_1) + R_4 \cdot (I_3 - I_2) = E \quad (2.26)$$

整理后可得:

$$(R_1 + R_2 + R_5) \cdot I_1 + (-R_5) \cdot I_2 + (-R_2) \cdot I_3 = 0 \quad (2.27)$$

$$(-R_5) \cdot I_1 + (R_3 + R_4 + R_5) \cdot I_2 + (-R_4) \cdot I_3 = 0 \quad (2.28)$$

$$(-R_2) \cdot I_1 + (-R_4) \cdot I_2 + (R_2 + R_4) \cdot I_3 = E \quad (2.29)$$

下面用行列式计算这些联立方程式,使用下面 A 、 I 、 V 三个矩阵:

$$A = \begin{vmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) & (-R_5) & (-R_2) \\ (-R_5) & (R_3 + R_4 + R_5) & (-R_4) \\ (-R_2) & (-R_4) & (R_2 + R_4) \end{vmatrix} \quad (2.30)$$

$$I = \begin{vmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{vmatrix} \quad (2.31)$$

$$E = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ E \end{vmatrix} \quad (2.32)$$

则联立方程式可表示为

$$A \cdot I = E$$

这个联立方程式可通过克拉姆(Cramer)公式(见 23 页)求出,即

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & (-R_5) & (-R_2) \\ 0 & (R_3 + R_4 + R_5) & (-R_4) \\ E & (-R_4) & (R_2 + R_4) \end{vmatrix}}{A} \quad (2.33)$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) & 0 & (-R_2) \\ (-R_5) & 0 & (-R_4) \\ (-R_2) & E & (R_2 + R_4) \end{vmatrix}}{A} \quad (2.34)$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} (R_1 + R_2 + R_5) & (-R_5) & 0 \\ (-R_5) & (R_3 + R_4 + R_5) & 0 \\ (-R_2) & (-R_4) & E \end{vmatrix}}{A} \quad (2.35)$$

桥式电路中,可以通过调整其他电阻使流过中央支路的电流为 0,来测量未知电阻。下面计算流过中央支路的电流 $I_1 - I_2$ 的大小。只要计算式(2.33)和式(2.34)的行列式即可。由式(2.33)得

$$\begin{vmatrix} 0 & (-R_5) & (-R_2) \\ 0 & (R_3+R_4+R_5) & (-R_4) \\ E & (R_1) & (R_2+R_4) \end{vmatrix} = E \cdot \begin{vmatrix} -R_5 & -R_2 \\ R_3+R_4+R_5 & -R_4 \end{vmatrix} \\ = [R_4 \cdot R_5 + R_2 \cdot (R_3+R_4+R_5)] \cdot E$$

由式(2.34)得

$$\begin{vmatrix} (R_1+R_2+R_5) & 0 & (-R_2) \\ (-R_5) & 0 & (-R_4) \\ (-R_2) & E & (R_2+R_4) \end{vmatrix} = -E \cdot \begin{vmatrix} (R_1+R_2+R_5) & -R_2 \\ -R_5 & -R_4 \end{vmatrix} \\ = [R_2 \cdot R_5 + (R_1+R_2+R_5) \cdot R_4] \cdot E$$

因为

$$I_1 = (R_4 \cdot R_5 + R_2 \cdot R_3 + R_2 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_5) \cdot E/A$$

$$I_2 = (R_2 \cdot R_5 + R_1 \cdot R_4 + R_2 \cdot R_4 + R_4 \cdot R_5) \cdot E/A$$

所以

$$I_1 - I_2 = (R_2 \cdot R_3 - R_1 \cdot R_4) \cdot E/A \quad (2.36)$$

因此,当流过中央支路的电流为 0 时

$$R_2 \cdot R_3 = R_1 \cdot R_4 \quad (2.37)$$

用上面的关系式,就可以很精确地测量未知的电阻值,这就是**惠斯登电桥(Wheatstone bridge)**。桥两边的电阻 R_2 、 R_3 为已知值, R_1 用高精度的可变电阻,接上未知电阻 R_4 后,调整 R_1 ,使通过中央支路高灵敏度电流计的电流为 0,于是未知电阻 R_4 的精确值可通过下式计算出:

$$R_4 = R_3 \cdot R_2 / R_1 \quad (2.38)$$

使用行列式的解法:克拉姆公式

对于有 n 个变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 联立一次方程式,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

写成矩阵形式

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

这样就可将方程式变换为式

$$Ax=b$$

此式的解为

$$x_j = \frac{1}{|A|} \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & \overset{j}{b_1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$

这就是克拉姆公式。

例如, 对于联立方程
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

因为

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 9$$

故

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{4}{9}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-1}{9},$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-7}{9}$$

运用克拉姆公式, 可以计算行列式, 于是就可以简单地计算出联立方程式的解。

参考文献:

滩波完尔: 线性代数, 实教出版社(1984)

增田胜彦, 横井英夫: 线性代数练习与解答, 广川书店(1976)

2.2 含有电容的直流电路的计算

即使电流为直流电,但是当回路中含有电容时,在达到稳定状态之前,仍然存在电流变化的过渡状态。我们将在第3章详细介绍过渡现象。这里只对直流电源的简单情况进行讨论。

首先来看图2.6的回路,开关S关闭时,电压为 V 的直流电源联接上未充电的静电容量为 C 的电容。试计算回路电流和电容上电压的变化。

闭合开关的瞬间,因为电容上还没有电压,所以回路电流为

$$I = E/R \quad (2.39)$$

当开始有电流时,电容就会产生端电压 V_C

$$V_C = \frac{1}{C} \int I dt \quad (2.40)$$

因此,回路方程式为

$$E = I \cdot R + \frac{1}{C} \int I dt \quad (2.41)$$

取微分,得

$$\frac{dI}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot I = 0 \quad (2.42)$$

设 K 为积分系数,这个微分方程式的解为

$$I = K \cdot e^{-t/RC} \quad (2.43)$$

当 $t=0$ 时

$$I = E/R$$

因此

$$\begin{aligned} K &= E/R \\ I &= E/R \cdot e^{-t/RC} \end{aligned} \quad (2.44)$$

从而可知

$$V_C = E \cdot (1 - e^{-t/RC}) \quad (2.45)$$

图2.7、图2.8描述了电流 I 与电压 V_C 随时间变化的情况。 $t=\infty$ 时, $I=0, V_C=E$ 。这就是稳定状态时的电流和电压。

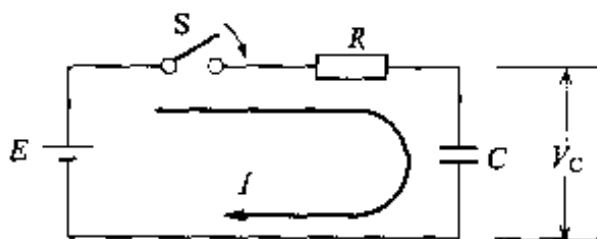


图 2.6

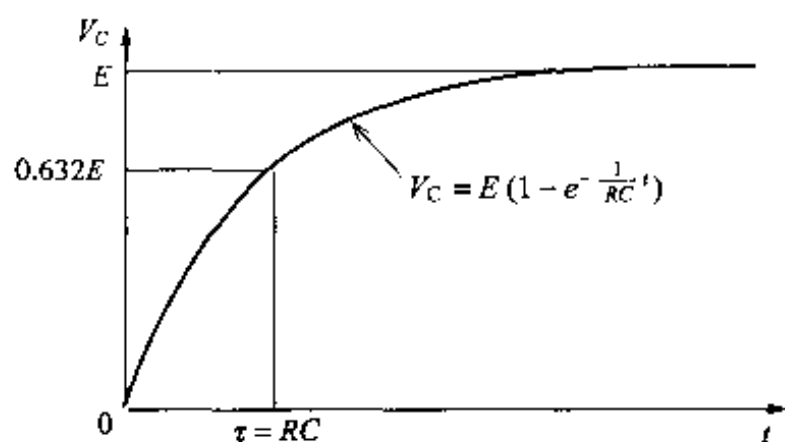


图 2.7 电容端电压的变化

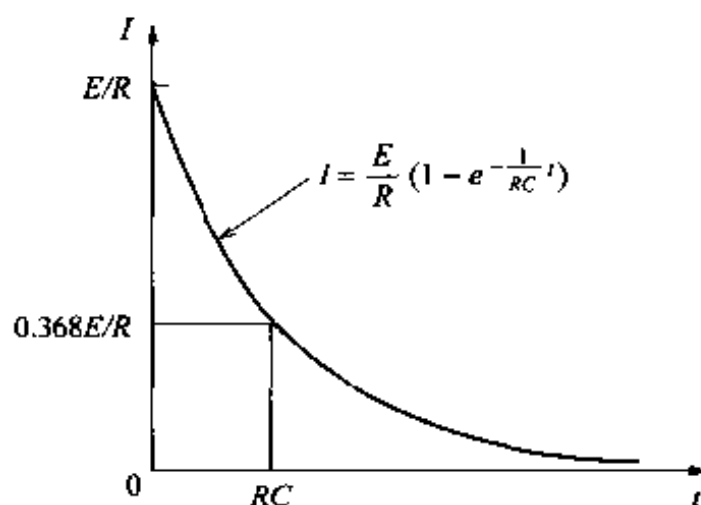


图 2.8 电容电流的变化

2.3 含有电感的电路

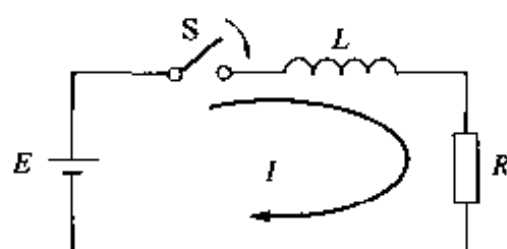


图 2.9

图 2.9 中直流电源联接有电感 L 和电阻 R , 计算开关 S 闭合后的电流 I 。

开关 S 闭合的瞬间, 电路中开始有电流产生, 但由于电感 L 上产生的电压

$$L \cdot \frac{dI}{dt} \quad (2.46)$$

所以电流不易流过。此时的回路方程式可

表示为

$$E = L \cdot dI/dt + R \cdot I \quad (2.47)$$

此微分方程式的解为

$$I = \frac{E}{R} + K \cdot e^{-(R/L)t} \quad (2.48)$$

当 $t=0$ 时, $I=0$, 积分常数 $K=-L/R$, 所以

$$I = \frac{E}{R} \cdot (1 - e^{-(R/L)t}) \quad (2.49)$$

图 2.10 表示电流的变化, 这和直流电源中接上电容时电容的电压随时间变化的图形相同。

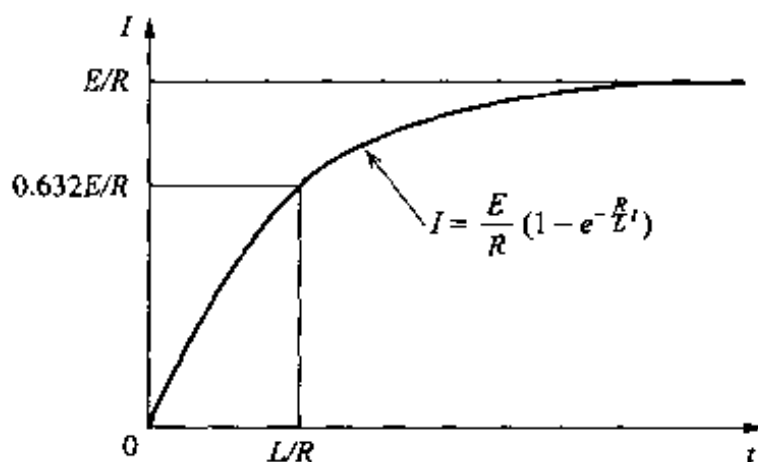


图 2.10 电感 L 中电流的变化

应用过渡现象的例子

这种时间的变化, 可以当作设定时间的回路来使用, 也就是说, 时间的变化速度以 $1 - e^{-at}$ 的形式来表现, 当 $at=1$ 时, 定义 τ 为时间常数, 这个时间可以通过电容的静电容量 C 、电感 L 及电阻 R 来改变。总之, RC 串联回路中, 可由 $\tau=RC$, RL 的串联回路中可由 $\tau=L/R$ 来设定时间常数。

►► 练习题

习题 1

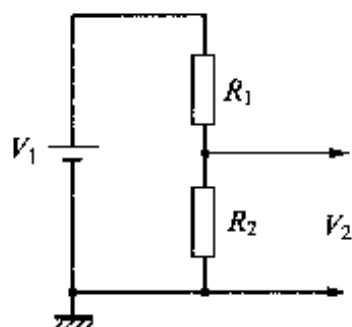


图 2.11

图 2.11 的回路中, 将高电压 V 分压, 由测量仪器来测量电压 V_2 , 请回答下面问题:

- (1) 当电压表的电阻非常高, 最大输入范围为 10V 时, 如果 $V_1 = 10\text{kV}$, 那么如何选择 R_1, R_2 ?
- (2) 此时选择电阻, 该注意什么问题?

习题 2

求图 2.12 中 AB 支路的电流 I_{AB} 。

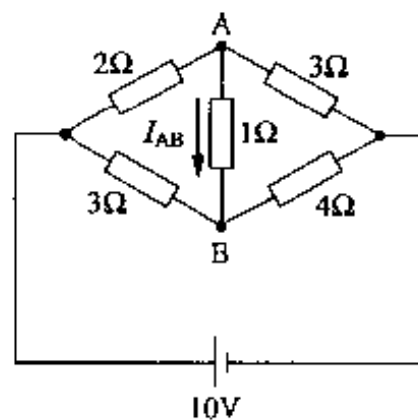


图 2.12

习题 3

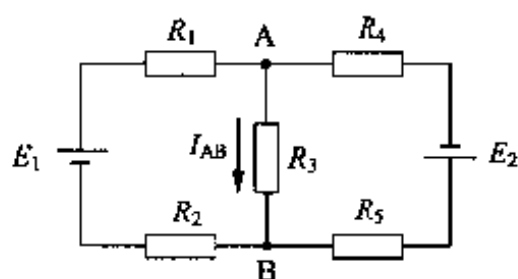


图 2.13

求图 2.13 电路中流过中央支路 AB 的电流 I_{AB} 。

习题 4

图 2.14 是内阻为 r 、电动势为 E 的电池供给负荷 R 功率的回路, 求此回路中供给负荷电阻 R 最大功率时的条件和最大电功率 $P_{\max}$ 。

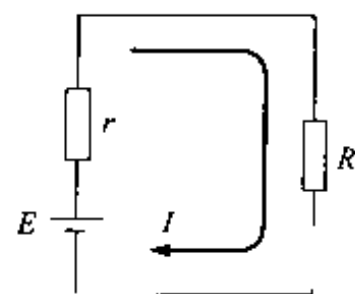


图 2.14

习题 5

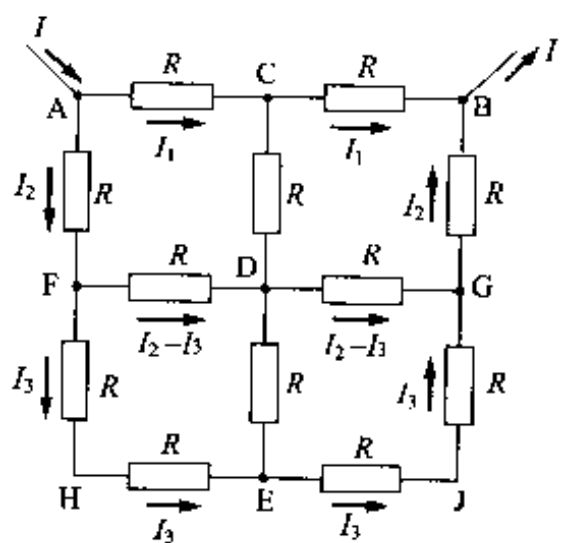


图 2.15

图 2.15 的电路中,用基尔霍夫定律求 A B 间的电阻 R_{AB} 。

第 3 章 交流电路

本章介绍有关交流电压、电流的概念,简述使用交流电的原因,并学习交流电压、电流、功率等的计算方法。

3.1 交流电的电压和电流

直流电的电压与电流都不随时间变化。与此相反,交流电的电压、电流的大小与方向,通常是随时间按正弦规律变化的,如图 3.1 所示。

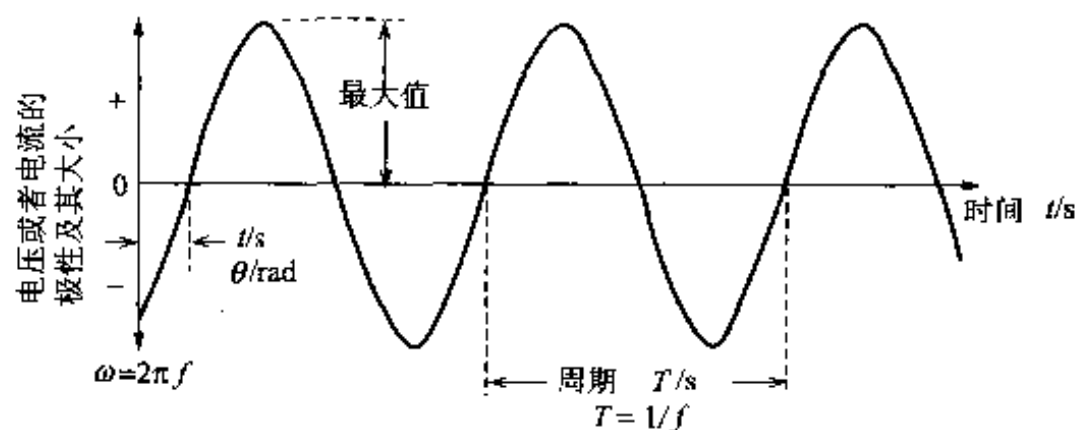


图 3.1 交流电压或电流的波形图

正弦波完成一个循环的变化所需的时间称为周期。每秒内变化的次数称为频率(frequency),其单位为赫兹(Hz)。

无论是对用电量大的工厂,还是一般的家庭,电力公司都是以交流电来配送的。日本西部(富士山以西)是频率为 50Hz 的交流电,日本东部则是 60Hz。这是由于在发电,配电系统的发展过程中,不易达到统一而造成的结果。

工厂或家庭中有很多机器或电气产品是以直流电工作的。一般情况

下,它们使用的直流电是把从电力公司输送来的交流电经过转换而得到的。

图 3.1 表示交流电压随着时间变化的情况。设交流电压的最大值为 $E_m[\text{V}]$,则电压可表示为

$$e = E_m \sin(\omega t - \theta) [\text{V}] \quad (3.1)$$

其中,括号里表示的角度单位是 $[\text{rad}]$,一个周期不是用 360° ,而是以 $2\pi[\text{rad}]$ 表示。 t 为时间,单位是 $[\text{s}]$ 。若此交流电压的频率为 $f[\text{Hz}]$,那么 1s 内变化的角度为 $2\pi f[\text{rad}]$ 。式(3.1)中的 ω 就是 $2\pi f[\text{rad/s}]$ 。 ω 称为角速度或角频率(angular velocity 或 angular frequency),即

$$\omega = 2\pi f [\text{rad/s}] \quad (3.2)$$

式(3.1)中的 $\theta[\text{rad}]$ 是 $t=0$ 时的角度,称为相位角(phase angle)。周期 T 是频率 $f[\text{Hz}]$ 的倒数,即

$$T = 1/f [\text{s}] \quad (3.3)$$

式(3.1)中 e 表示每一瞬时的电压,所以称为瞬时值(instantaneous value)。

电力公司提供的电压有时存在失真情况,但因基本上是正弦波,所以在交流电路的计算时,通常仍然把电压、电流的波形当作是理想正弦波来处理。当然,有些情况下,因不同的目的或用途的需要,还是要考虑失真现象。本章讨论基本上为正弦波的情形。

对于失真的波形,可视其为不同频率和相位合成的正弦波来计算(见第 6 章)。

3.2 广泛使用交流电的原因

日本最初开始供电是在 1887 年(明治 20 年),当时只是把电提供给邻近地方。供电系统配给的是 220V 的直流电。随着对电的需求量的增大,使得远距离输电有了必要,而水力发电也显示出了巨大优势。

以直流电为例,输电时,若电阻为 $R[\Omega]$,电流为 $I[\text{A}]$,那么就会有 $I^2 R[\text{W}]$ 的功率被转化成热能消耗了,而且还会出现 $IR[\text{V}]$ 的电压降。实际应用中,电力的损耗和在接收端负荷上的电压降低都是极力想避免的。为了减少损耗,有必要降低电线的电阻,这就需要加粗输送电线。不过,从经济上考虑,此为不智之举。

功率等于电流与电压的乘积,如果以 10 倍的电压进行输电,那么电流

就变为原来的十分之一。对同一电阻而言,线路上所消耗的电能仅是原来的百分之一,电压降是原来的十分之一。由此可看出,输送高电压比较经济。当然,为了更好地做到绝缘,需要一些费用,但就总体来讲,对于远距离输电,还是相对经济的。

现在,利用能源电子学可以简单地变换直流电压,这在半导体元件发展起来之前,很难办到。但是,对于交流电,早在 100 年以前,人们就已经发明了变压器,利用它改变电压、电流的大小相当容易,而且通过两个分开的线圈,还容易做到高压端与低压端的绝缘。

在实际应用中逐渐形成的输电方法是:把从水力发电厂的电,先通过变压器变为高压后输出,然后,利用各地变电所(建立在大量的用电区)中的变压器再把高压降低,最后把低电压输送到工厂及各家各户。

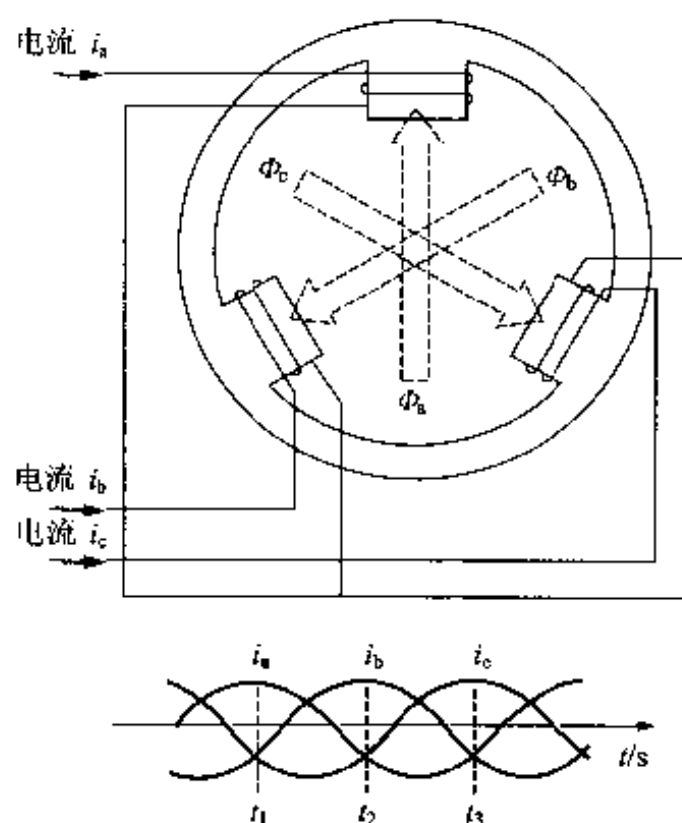
日本在 1889 年(明治 32 年)开始输送 11kV 的交流电,现在输送的最高电压可达 1.1MV。

一直以来,输送或配给的电基本上是交流电。但是,最近随着各种技术的发展,开始重新输送直流电。日本的本州至北海道间,已经在输送 250kV、1.2kA 的直流电(海底电缆)。另外,计划在四国至纪伊半岛间输送 500kV 的直流电。

广泛使用交流电的另一个理由是因为容易形成电动机的旋转磁场。送电、配电中一般利用三根电线的三相交流电,它是由相位差为 $2\pi/3$ [rad] 的交流电压、电流构成的。如图 3.2 所示的原理图那样,它能够产生旋转磁场。

使用最普遍的电动机是三相交流感应电动机。这种电动机的定子(固定不动的部分)产生旋转磁场,在旋转磁场的作用下,转子(旋转部分)就会旋转起来。这种电动机的结构比较简单。而只有两根电线的单相交流电,必须改变绕组的结构才能产生旋转磁场。

交流电易于产生,并能通过变压器改变电压,而且交流电动机的结构简单,经济性能好,因此交流电长期以来得到了人们的广泛使用。



t_1 时刻的磁通量为 Φ_a ,
 t_2 时刻为 Φ_b , t_3 时刻为 Φ_c 。
 经详细计算可知, 磁通以相同大小旋转。通过对绕组
 的处理, 实际电动机不会出现
 尖凸磁极。

图 3.2 交流电流的波形图

3.3 交流电的发电原理

产生的交流电压和电流是相同频率的正弦波, 因此无论是从机器的设计、电路的设计、还是各种计算来看, 都非常方便。电力公司生产的交流电, 总是要设法使其产生正弦波。特别是发电机, 它需要产生准确的正弦波的电压。实际上, 人们通过各种技术, 也确保了交流发电机产生的是正弦电压。

然而, 从历史上来看, 也有通过比较简单的方法而得到正弦电压的。如图 3.3 所示, 在同一磁场中旋转绕组, 就可产生正弦交流电压。固定绕组、旋转磁场也可以产生正弦交流电压。不过, 从实用性或有效地使用机器来说, 非常有必要确保正弦波形。

图 3.3 中 $\otimes$ 表示电压的方向向外, $\odot$ 表示向里, 这遵循弗莱明右手定律。

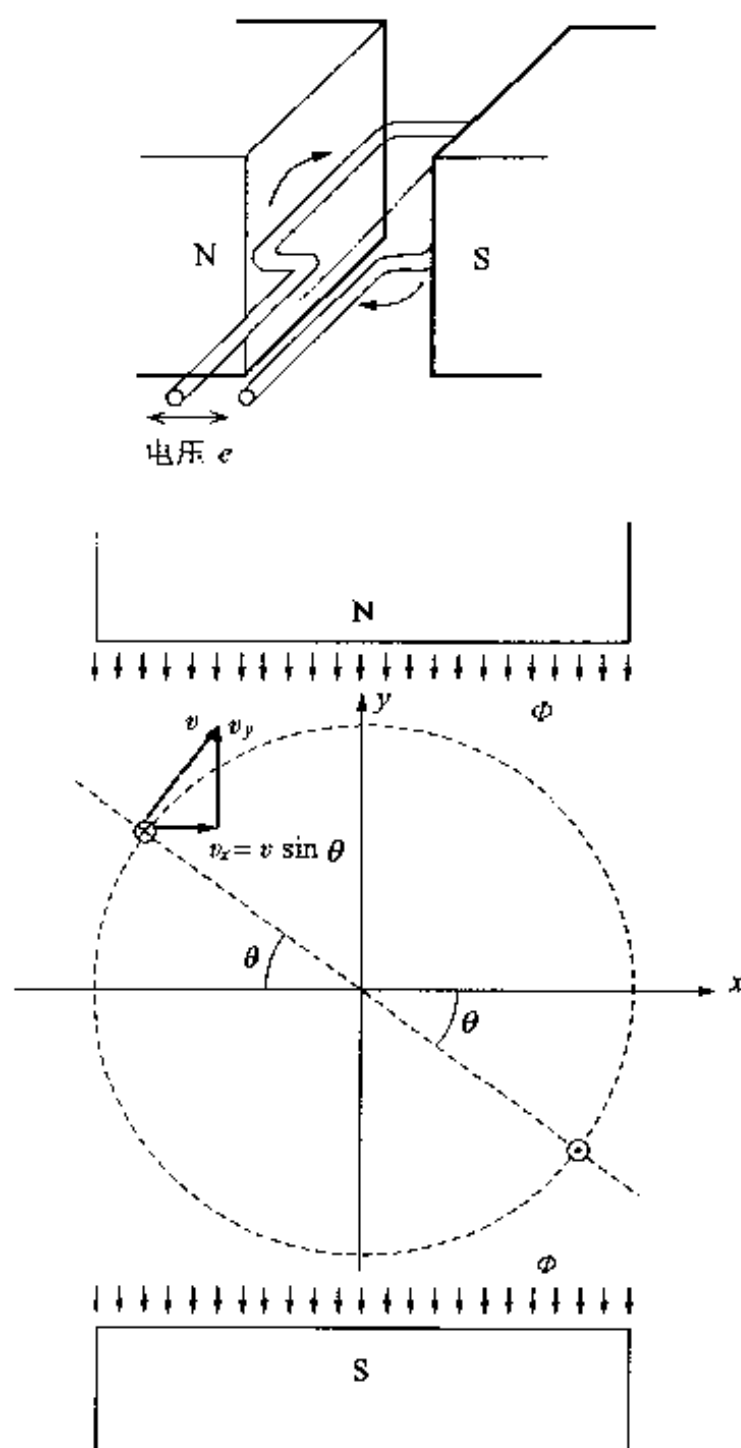


图 3.3 导体在磁通中旋转产生正弦电压

因为产生的电压与导体 x 方向上的速度 v_x 成正比,其关系式为

$$v_x = v \sin \theta$$

所以当旋转导体时,就会产生正弦波电压。

现在,随着半导体元件的发展,可以比较简单地将直流电转换成交流电。把这种装置称为逆变器。直流电可以利用半导体整流器对交流电进行整流得到,当交流电转换成直流电后,又可以通过逆变器再次产生交流电。根据这个原理,就可制造出改变交流电频率的装置。这些设备用在电力公

司 50Hz 区域和 60Hz 区域间电力的融通或交流电动机的控制装置上。

为了提高效率,通常利用半导体元件断开或闭合的状态,所以逆变器输出的交流电中最简单的波形是矩形波,如图 3.4(a)所示。在电动机这种多电感的回路中,加上矩形波的电压时电流由于也不会发生急剧的变化,所以接近于正弦波,因此常常使用。如果需要电流的波形平滑地接近正弦波,可以利用图 3.4(b) 的原理,逐步地控制断开、闭合状态,此时电压也接近于正弦波。

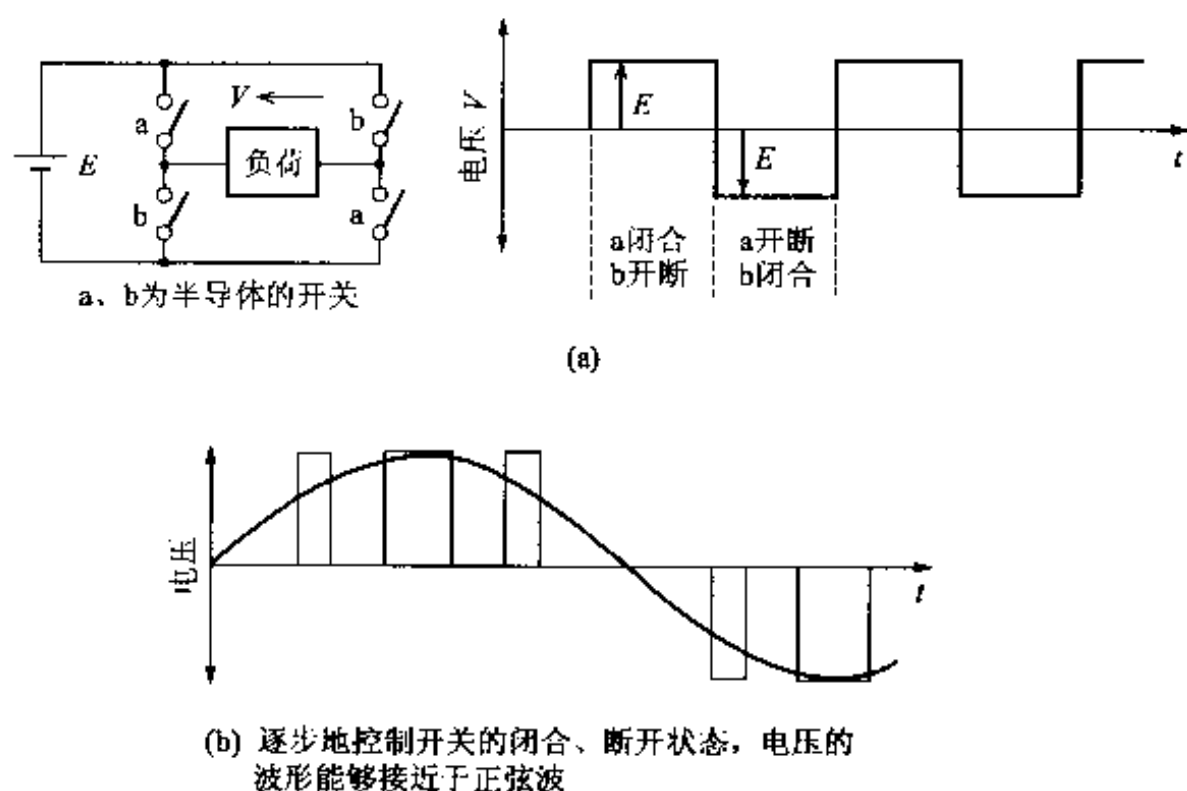


图 3.4 逆变器的工作原理

关于逆变器等半导体元件应用的详细情况,请参阅其他书籍。

3.4 交流电压、电流和功率

交流电压产生的是式(3.1)描述的正弦波,时时刻刻发生变化。交流电流也是一样,其表达式为

$$i(t) = I_m \sin(\omega t - \theta) \text{ [A]} \quad (3.4)$$

电压、电流在任一时刻的值称为瞬时值。式(3.4)为瞬时值的表达式。

根据表达式,虽然可计算出电压及电流,但因其繁琐,故常常只计算它们的大小数值。

那么,如何来计算正弦电压、电流的大小数值呢?这可以利用正弦波的最大值 E_m 、 I_m 可以很简单地得到。实际上,用这些值来计算功率时,其值和直流电计算出的功率不符,在交流中,功率的瞬时值也是由电压与电流之积决定的。下面,我们来计算一个周期内的功率。为简单起见,首先令电压、电流表达式中的 θ 为 0,即相位相同。设一个周期内的平均功率为 P ,按正弦波的性质可知,由下列式子求出 $1/4$ 个周期内的平均值即可:

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{T/4} E_m \sin \omega t I_m \sin \omega t dt \bigg/ \frac{T}{4} = \frac{4}{T} E_m I_m \int_0^{T/4} \sin^2 \omega t dt \\ &= \frac{4}{T} E_m I_m \int_0^{T/4} \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= \frac{2}{T} E_m I_m \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^{T/4} \\ &= \frac{2}{T} E_m I_m \frac{T}{4} = \frac{E_m I_m}{2} \end{aligned} \quad (3.5)$$

当电压与电流同相时,平均功率等于电压的最大值与电流的最大值乘积的 $1/2$,这是因为图 3.5 中所示的功率的瞬时值是随时间变化的。

从式(3.5)可知,如果电压与电流的大小为各自最大值的 $1/\sqrt{2}$,那么交流电的平均功率就等于电压与电流之积,这和直流电功率的计算方法相同。因此,正弦交流电的电压与电流值一般是指其最大值的 $1/\sqrt{2}$,这个值称为有效值。

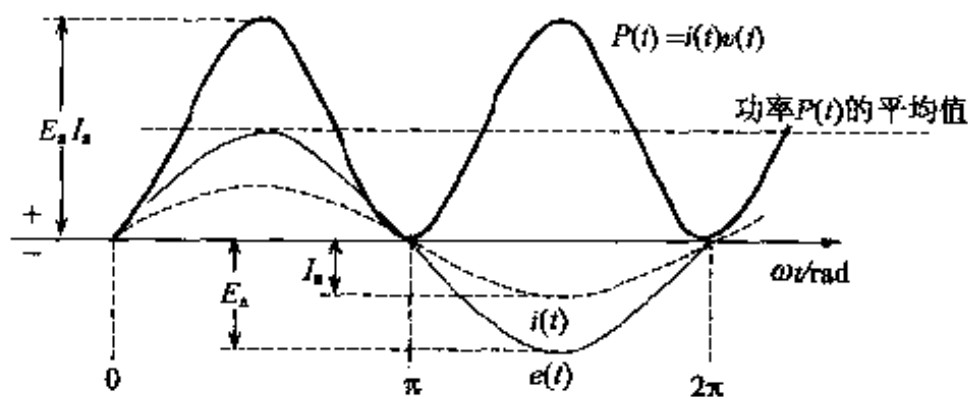


图 3.5 电压和电流的相位相同时的交流电功率

功率和电压与电流的乘积或电压、电流的二次方成正例,因此,电压的有效值可表示为下式所示的二次均方根的形式:

$$E = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} E_m^2 \sin^2(\omega t) d\omega t} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \quad (3.6)$$

交流电压、电流的有效值表达式为

$$\left. \begin{aligned} E &= E_m / \sqrt{2} \approx 0.707 E_m \text{ [V]} \\ I &= I_m / \sqrt{2} \approx 0.707 I_m \text{ [A]} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

其中 E 、 I 为有效值, E_m 、 I_m 为最大值。

一般所说的正弦电压与电流的数值都是指有效值。例如供给家庭用的 100V 的交流电,其最大值是 141V。

有效值在英语中叫做 effective value,意思是说,它与相同大小的直流电压、电流具有同等功效。

在后面的论述中,如不特别指明,交流电压、电流的大小都指其有效值。

有效值和平均值

有效值不同于平均值。

设电压的平均值为 E_a ,平均值可由下式求得:

$$\begin{aligned} E_a &= \int_0^{\pi/2} E_m \sin(\omega t) d\omega t / \frac{\pi}{2} \\ &= E_m (2/\pi) \approx 0.637 E_m \text{ [V]} \\ &= \sqrt{2} E (2/\pi) \approx 0.900 E \text{ [V]} \end{aligned}$$

由此可见,平均值是有效值的 0.900 倍。

3.5 功率因数

第 3.4 节中计算的功率,是以电压与电流同相为前提的。但是,交流电中,由于受电路中元件的影响,电压与电流有时相位并不相同。

当电路中只有电阻时,电压与电流同相;当含有电感和电容时,电压与电流不同相。电磁学告诉我们,当电感为 L 、电容为 C 时,电压 e 与电流 i 的关系是

$$e=L(di/dt), \quad i=C(de/dt)$$

以 t 求 $\sin(\omega t)$ 微分, 得

$$\omega \cos(\omega t) = \sin(\omega t + \pi/2)$$

且相位超前 $\pi/2$ 。对电感而言, 是指电压超前电流, 对电容来说, 是指电流超前电压。

只含电感的电路, 电流的相位落后于电压。当电路中含有多个元件时, 各部分电压与电流的相位关系是由各个元件及其联接方法确定的。

电压与电流存在相位差时, 功率表示为

$$\begin{aligned} P &= \int_0^\pi E_m \sin(\omega t) I_m \sin(\omega t \pm \phi) d\omega t / \frac{\pi}{2} \\ &= E_m I_m \int_0^\pi [\sin^2(\omega t) \cos\phi \pm \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin\phi] d\omega t / \frac{\pi}{2} \\ &= E_m I_m \cos\phi \int_0^\pi \sin^2(\omega t) d\omega t / \frac{\pi}{2} \quad [\text{W}] \end{aligned} \quad (3.8)$$

设电流与电压的相位差为 ϕ , 由波形图可知, 在半个周期内求积分即可。

式(3.8)第二个等号中的 $\sin(\omega t) \cos(\omega t)$ 等于 $\sin(2\omega t)/2$, $\sin(\omega t)$ 半个周期的积分为 0, 所以最后得出了功率的表达式。这相当于给式(3.5)乘以 $\cos\phi$, 因此功率又可以表示为

$$P = E_m I_m \cos\phi / 2 = EI \cos\phi \quad [\text{W}] \quad (3.9)$$

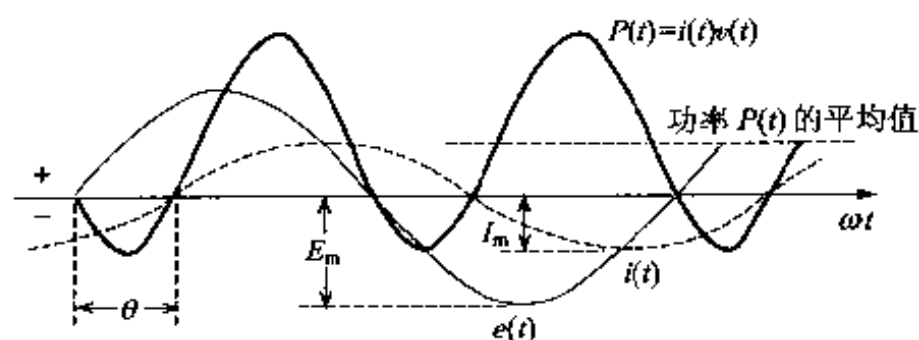
若以电压为基准, 无论电流的相位超前还是落后, 功率都会变小, 这是因为暂时储存在电感和电容中的能量返回到电源时需要一段时间。

$\cos\phi$ 叫做功率因数, 功率因数是一个系数, 没有单位, 可以以 0.5 或 50% 表示。电流超前于电压时它称为超前功率因数, 落后于电压时称为落后功率因数。当电路中有很多电感存在时, 常常是落后功率因数。

如果功率因数的值较小, 即电压与电流的相位差较大时, 和电流相比输送出的功率很少, 因此通常都要考虑如何调整输电线、配电线、工厂设备等, 使功率因数接近于 1。

图 3.6 表示的是功率因数不是 1 时电压、电流与功率之间的关系。EI 称为视在功率(单位为 VA), $EI \cos\phi$ 称为有功功率(单位为 W), $EI \sin\phi$ 称为无功功率(单位为 VA 或 var)。

有功功率是电压与电流同相分量的乘积, 无功功率是相位差为 90 分量的乘积, 而当功率因数等于 0 时, 功率的平均值为 0, 即只有无功功率。



功率 $P(t)$ 的平均值为 $E_m I_m \cos \theta / 2 = EI \cos \theta$

图 3.6 电流相位落后 θ [rad] 的交流电的功率

3.6 稳定状态和过渡状态

在一瞬间,给有些电路加上一个电压,不论是直流电压,还是交流电压,电路中的电流都会随时间发生变化,经过一段时间后,才能达到稳定。只含有电阻的电路不会发生以上的变化。当电路中含有电感或电容时,电流或电压在达到稳定值之前,基本上都需要一段特定时间,时间的长短与元件的值及接续方法有关。关于直流电的过渡现象,我们已在第 2 章中论述过了。

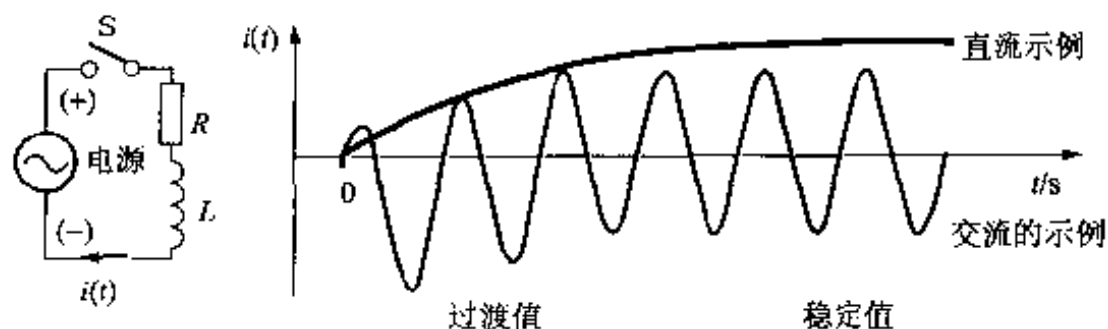
过渡过程中,电流或电压随时间逐渐变化到一个值,即它们只能发生渐变,而不能突变。把这种变化着的状态称为**过渡状态**;这样达到稳定后的状态称之为**稳定状态**。

过渡状态中的电流、电压值称为**过渡值**,稳定状态下的电流、电压值称为**稳态值**。

过渡值可由电感或电容上的电压与电流的微分方程式求出。为了区别于一般电路的计算,将其称为**过渡现象**的计算。

一般电路中的电压、电流计算,无论是直流电还是交流电,都是稳态值的计算。直流电路在稳定状态时,无电阻的理想电感上的电压为 0,电容上的电流为 0,因此,将电感短路、电容开路时电路中电压与电流的值为稳态值。

根据所给的条件,有必要判断是否需要求出过渡值。本章要讨论的是交流电路的稳态值的计算,有关过渡现象,我们将在第 8 章学习。



- 在 $t=0$ 开关闭合时的电流
- 交流电中 $t=0$ 时电压的相位也影响波形

图 3.7 电流的过渡现象示例

当交流电路的电压、电流处于稳定状态时,电路中各元件上的电压、电流当然也是稳态值。下面分别讨论各元件的情况。

设元件上的电压为 E , 电流为 I (均为稳态值, 且为有效值)。

对于电阻来说, 因为电压与电流的相位相同, 所以它们之间的关系式与直流电路一样, 均由下式表示:

$$E = RI \quad (\text{电阻值为 } R[\Omega]) \quad (3.10)$$

对于电感元件, 设电感值为 $L[\text{H}]$, 则

$$E = L \frac{di}{dt} \quad (t \text{ 是时间}(s))$$

I 为 $\sin \omega t$ 时, E 等于 $\omega L \cos \omega t$, E 是 I 的 ωL 倍, 相位超前于电流 90° 。虽然可以把 ωL 看作是电阻, 但是电压与电流之间的相位关系还需用另外的方式表示。

对 $\sin \omega t$ 求一次导数, 得 $\omega \cos \omega t$, 再求导一次, 即求二次导数后为 $-\omega^2 \sin \omega t$, 相位超前 180° , 由此可知在稳定状态下, 一次微分乘以 $\sqrt{-1}\omega$, 计算比较简单。 $\sqrt{-1}$ 是虚数, 数学上表示为 i , 在电气领域, 因为常常以 i 表示电流, 所以用 j 来表示虚数 (为方便起见, 用 $j\omega$ 代替 d/dt , 这样, 不仅计算简便, 看起来也直观)。

在稳定状态下, j 表示相位超前 90° , $-j$ 表示相位落后 90° 。因此, 电感上电流与电压的关系可表示为

$$E = j\omega LI \quad \text{或} \quad I = E/j\omega L \quad (3.11)$$

对电容而言, 电压与电流间的关系是

$$I = C(dE/dt)$$

同理, 以 $j\omega$ 代替 d/dt , 可得:

$$E = I / j\omega C \quad \text{或} \quad I = j\omega CE \quad (3.12)$$

像变压器那样,当两个线圈通过磁通结合在一起时,不同的线圈间存在着互感。含互感电路的计算比较烦琐。

下面计算图 3.8 所示的简单电路。

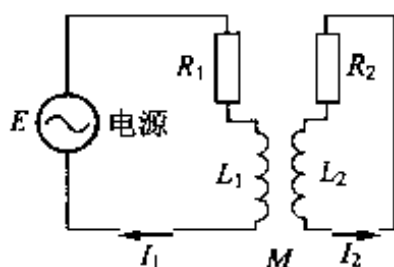


图 3.8 有互感 M 的电路(示例)

有互感存在的电路,一个回路中的电流会通过磁通的变化影响另一个回路。回路电流的计算方法与自感的情形类似,只是某一回路的电流方程式中还含有另一回路的电流。

图 3.8 电路中求稳态值的基本计算式为

$$\left. \begin{aligned} E &= R_1 I_1 + j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2 \\ 0 &= R_2 I_2 + j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

3.7 相量图

前面论述了在交流电中,当电压与电流有相位差时,超前 90° 用 j , 落后 90° 用 $-j$ (落后或超前 180° 表示为 -1) 表示它们之间的相位差。交流电的电压与电流的关系也常常用相量图(也称为相图)表示。

相量图可以从视觉上简单地看出电压与电流的相位关系。

在相量图中,用带箭头的线段表示电压、电流。线段的长度与电压、电流的大小成一定的比例。两线间的夹角表示相位差,以逆时针旋转表示相位超前。稳定状态时,由于代表电压、电流的线段长度及其之间的夹角是个定值,因此才可以用相量图表示二者的关系。图 3.9 表示式(3.10)、式(3.11)、式(3.12)对应的相量图。不过,它只表示出了一种相对关系。实际上,通常要建立直角坐标系,以横轴为实数、纵轴为虚数来表示电压与电流间的关系。

电压与电流的表达式中出现 j 表示它们之间的相位关系时,在 E 、 I 的上方加一个圆点($\cdot$)。在以后的论述中如果没有加圆点,就表示绝对值的大小(例如 $|\dot{E}| = E$)。

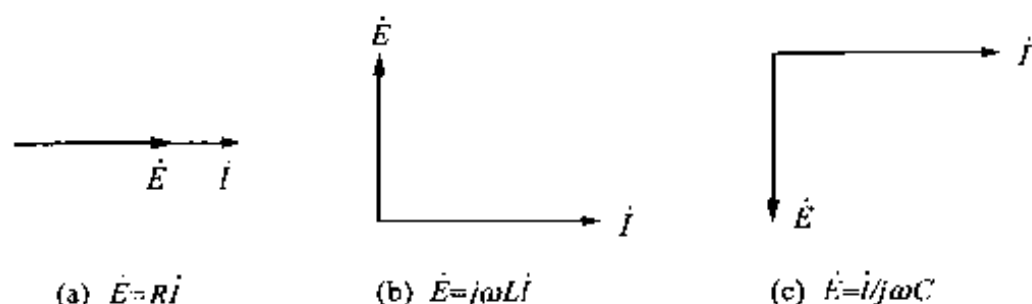


图 3.9 电阻、电感、电容的电流与端电压的相量图

3.8 复数运算、阻抗、电抗

交流电路稳态值的计算常常用到 j , j 在数学上称为虚数。由于电压和电流通常表示为实数与虚数之和, 因此把这种计算称为**复数运算**。

含有电感和电容的交流电路, 电压与电流之比通常表示为下面的复数形式:

$$\dot{E}/\dot{I} = Z = R + jX \quad (3.14)$$

Z 相当于直流电路中的电阻, 它表示阻碍电流流过元件的能力。 Z 称为**阻抗**。 Z 的实数部分是阻抗的电阻分量, 虚数部分 X 是阻抗的电抗分量。 Z 、 R 、 X 的单位同电阻一样, 均为欧姆 $[\Omega]$ 。由此式, 可计算出电压、电流、阻抗的关系。

根据不同的需要, 有时也用到阻抗的倒数 Y , 即

$$Y = 1/Z = \dot{I}/\dot{E} = G + jB \quad (3.15)$$

Y 称为**导纳**, 表示导通电流的能力, G 称为**电导**, B 称为**电纳**。 Y 、 G 、 B 的单位与电导的单位相同, 都为 西门子 $[S]$ 。

图 3.10 所示的是式(3.14)和式(3.15)的相量图。

一般情况下, 交流电路的计算就是计算 Z 或 Y , 以及在加上电压时求电流, 或有电流通过时求电压。电流和电压由实数部分和虚数部分组成的代数形式来表示。

电压与电流大小取其绝对值 E 、 I 来表示。比如, 若 E 为 $a + jb$, 根据复数运算法则和毕达哥拉斯定理(勾股定理), 可由下式求出:

$$E = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (3.16)$$

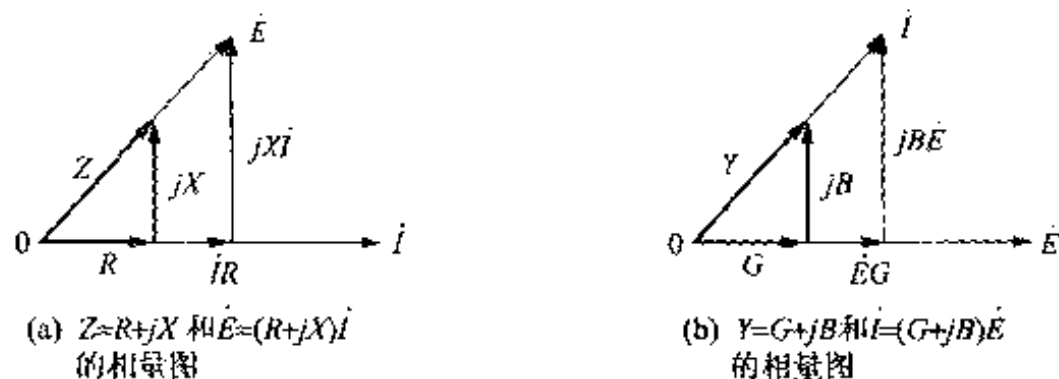


图 3.10

设 $\dot{E}=a+jb$, $\dot{I}=c+jd$, 那么电路的阻抗为

$$\begin{aligned} Z &= (a+jb)/(c+jd) \\ &= (a+jb)(c-jd)/(c^2+d^2) \\ &= \{(ac+bd) + j(bc-ad)\}/(c^2+d^2) \end{aligned} \quad (3.17)$$

Z 的绝对值是

$$\begin{aligned} Z &= \sqrt{\{(ac+bd)^2 + (bc-ad)^2\}/(c^2+d^2)^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)}/\sqrt{(c^2+d^2)} \\ &= E/I \end{aligned} \quad (3.18)$$

从式(3.18)可知, 如果只考虑电压、电流和阻抗的大小问题, 只要求出绝对值的大小即可, 这与直流电的电压、电流、电阻的计算相同。

从式(3.9)可知, 功率等于 $EI\cos\phi$, ϕ 是 $\dot{E}$ 与 $\dot{I}$ 的相位差, 也就是相量图中的夹角。 EI 不是相量, 这点需要特别注意。

由 $\dot{E}$ 、 $\dot{I}$ 可计算出功率和功率因数。下面讨论利用阻抗来计算的方法。设阻抗 Z 为 $R+jX$, 则

$$\dot{E}=(R+jX)\dot{I}=R\dot{I}+jX\dot{I}$$

$\dot{E}$ 等于电压与电流同相位时的分量 R 和相位差为 90° 时的分量 $jX\dot{I}$ 之和。因此

$$\text{有功功率为 } P=RI^2$$

$$\text{无功功率为 } Q=XI^2$$

若 X 为正, 则电压相位超前, 若 X 为负, 则电压相位落后。

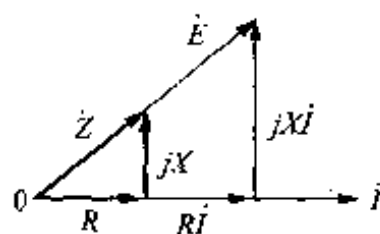
$$\text{视在功率为 } S=EI$$

图 3.11 表示了它们之间的关系。

功率因数和功率分别为

$$\begin{aligned}\cos\phi &= RI^2/EI = RI/E = R/(E/I) = R/Z \\ &= R/\sqrt{R^2 + X^2}\end{aligned}\quad (3.19)$$

$$P = EIR/\sqrt{R^2 + X^2}\quad (3.20)$$



视在功率 $= EI$
有功功率 $= RI^2 = EIR/\sqrt{R^2 + X^2}$
无功功率 $= XI^2 = ELX/\sqrt{R^2 + X^2}$

图 3.11 功率相量图(R 与 X 串联)

3.9 交流电路的计算方法

● 3.9.1 R 电路

这里我们把电源当作是内阻为 $0[\Omega]$ 的恒压电源。如果要考虑内阻, 计算时则把电源看作是一个恒压电源和内阻串联的电路。在此, 不讨论恒流电源, 也就是说, 把它当作是一个与阻抗无关、有一定电流流过的电源即可。

在电阻电路中, 电压与电流间无相位差, 因此没必要采取复数计算法。它们的计算与直流电路的计算相同。如果仍要用复数计算, 算法如下:

因为没有电抗分量, 故 $Z = R[\Omega]$ 。由于 $\dot{I} = \dot{E}/Z = \dot{E}/R$, 电压与电流无相位差, 所以 $I = E/R[\text{A}]$, 功率为 $P = IE = I^2 R = E^2/R[\text{W}]$, 功率因数为 $\cos\phi = R/Z = R/R = 1$ 。

电阻的串、并联计算与直流电路的计算方法相同。

下面举例说明。若电阻电路中 $E = 100\text{V}$, $P = 600\text{W}$, 求电流和电阻。

$$I = P/E = 600/100 = 6\text{A}$$

$$R = E^2/P = 10000/600 \approx 16.7\Omega$$

相量图如图 3.13 所示。

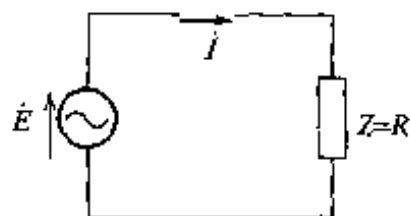


图 3.12 R 电路

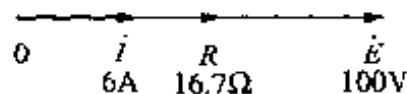


图 3.13 R 电路的相量图示例

● 3.9.2 RL 电路

下面讨论电阻和电感串联的简单电路中电压、电流及阻抗的关系。电路图及相量图如图 3.14 所示。 E 为电压, I 为电流, 下角标表示电阻(R)和电感(L)。

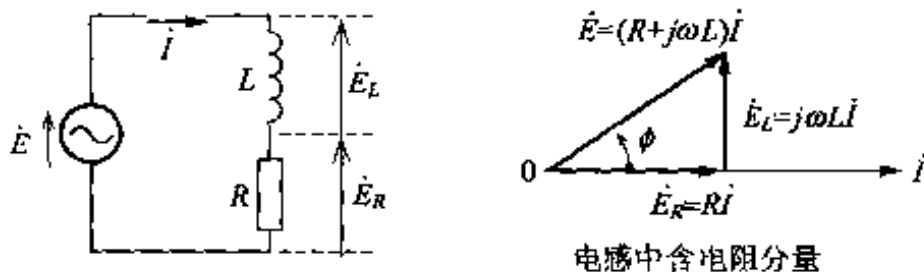


图 3.14 RL 串联电路与相量图

在图 3.14 中

$$\dot{E} = \dot{E}_R + \dot{E}_L = R\dot{I} + j\omega L\dot{I}$$

因此, 电路中的阻抗 Z 为

$$Z = \dot{E}/\dot{I} = R + j\omega L$$

它是电阻 R 和电感的电抗值 $j\omega L$ 的代数和。这与几个电阻串联后, 电路中总电阻的计算方法相同。整理后, 我们可得出 $\dot{E}$ 、 $\dot{I}$ 、 Z 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= \dot{E}/Z = \dot{E}/(R + j\omega L) \text{ [A]} \\ Z &= \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \text{ [\Omega]} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

分析图 3.14 所示的电路可知, 视在功率为 $E I$ [VA], 有功功率为 $E_R I = R I^2$ [W], 无功功率为 $E_L I$ [var]。电路中只有电阻 R 消耗能量。电感有时从电源处吸收能量, 有时把储存在磁场中的能量送回给电源, 而在—

个周期内,吸收和输送的能量相等,因此,电感的平均功率为 0。因

$$\dot{E} = \dot{E}_R + \dot{E}_L$$

故

$$E_R/E = RI/ZI = R/Z = \cos\phi$$

【例 3.1】 $E=100\text{V}$ (有效值), $R=10\Omega$, $L=0.1\text{H}$, 频率 $f=50\text{Hz}$, 求电流、功率和功率因数。

解 $Z=10+j(2\cdot\pi\cdot 50\cdot 0.1)=10+j10\pi$

$$\begin{aligned}\dot{I} &= 100/(10+j10\pi) = 100(10-j10\pi)/(100+100\pi^2) \\ &\approx 0.920-j2.89\end{aligned}$$

从式(3.18)可知

$$Z = \sqrt{10^2 + 10^2\pi^2} = 33.0\Omega$$

故

$$I = E/Z = 100/33.0 = 3.03\text{A}$$

通过求 $\dot{I}$ 的绝对值,也可求出 I 的值,即

$$|\dot{I}| = \sqrt{0.920^2 + 2.89^2} = 3.03\text{A}$$

有功功率是电压与电流同相分量之积,即

$$100 \cdot 1000/(100+100\pi^2) = 92.0$$

或者由式(3.19)、式(3.20)也可计算出

$$\cos\phi = 10/\sqrt{10^2 + 10^2\pi^2} = 0.303$$

$$P = 100 \cdot 3.03 \cdot 0.303 = 91.8\text{W}$$

电压相位超前电流 72.34° (由 $\cos^{-1}0.303$ 得出)。

下面讨论电阻与电感并联的电路。

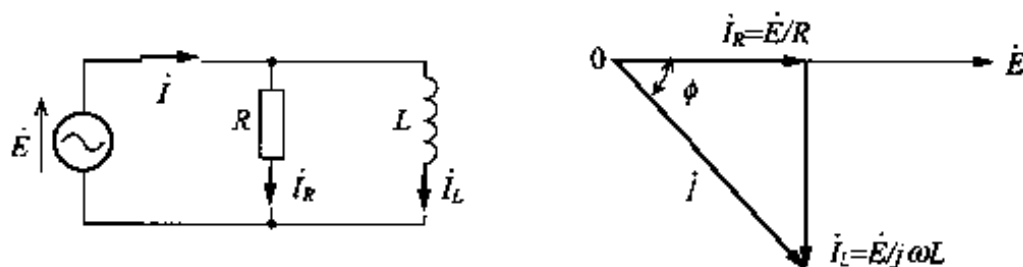


图 3.15 RL 并联电路和相量图

根据 E 和 I 的关系式,可求出阻抗,即由

$$\dot{I} = \{ (1/R) + (1/j\omega L) \} \dot{E}$$

可知

$$1/Z = (1/R) + (1/j\omega L)$$

故

$$Z = j\omega L R / (R + j\omega L) = \omega L R (\omega L + jR) / (R^2 + \omega^2 L^2)$$

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \omega L R / (R^2 + \omega^2 L^2)$$

它的计算与电阻并联电路的计算方法相同。

如果给电路接上电压,就可求出电路中的电流:

$$I = E/Z = E \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} / \omega L R$$

若 L 或 R 为 0,则阻抗为 0,电流为无限大。

视在功率为

$$EI = E^2 \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} / \omega L R \quad [\text{W}]$$

或

$$EI = E^2 \omega L R / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2} \quad [\text{W}]$$

功率因数为

$$\cos\phi = \omega^2 L^2 R / (R^2 + \omega^2 L^2) Z = \omega L / \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$$

有功功率为

$$E^2 / R$$

或

$$I^2 \omega^2 L^2 R / (R^2 + \omega^2 L^2)$$

从 $\dot{I}_R = \dot{E}/R, \dot{I}_L = j\omega L$

$$\dot{I} = \dot{E} \{ (1/R) + (1/j\omega L) \} = \dot{E} \{ (j\omega L + R) / j\omega L R \}$$

可知

$$\dot{I}_R = \dot{I} (j\omega L / (j\omega L + R)) = \dot{E}/R$$

$$\dot{I}_L = \dot{I} (R / (j\omega L + R)) = \dot{E}/j\omega L$$

因此,直流电路中计算各电阻上电流的方法在并联交流电路中也同样成立。

与直流电路一样,有些电路,仅用计算串、并联电路的方法无法求出总阻抗。这种情况下,仍和直流电路那样,要根据基尔霍夫定律计算出总阻抗和各元件上的电流。

下面举例说明如何通过基尔霍夫定律求总阻抗和各电流。为简便起见,假设图 3.16 中三个电阻和两个电感的值各自相等,根据第 2 章学到的

基尔霍夫电压定律的网孔电流法,标出电路中的网孔电流,如图所示。

设 $\omega L = X$, 可得出下列三式:

$$\dot{E} = (R + jX)\dot{I} - jX\dot{I}_1 - R\dot{I}_2 \quad (3.22)$$

$$0 = \dot{I}jX - \dot{I}_1(2R + jX) + \dot{I}_2R \quad (3.23)$$

$$0 = \dot{I}R + \dot{I}_1R - \dot{I}_2(2R + jX) \quad (3.24)$$

由上面的式(3.22)减去式(3.23)与式(3.24)之和,可推导出

$$E = \dot{I}_1R + \dot{I}_2jX \quad (3.25)$$

也可通过分析电路图得出。

另外,式(3.23)加式(3.24),得

$$0 = \dot{I}(R + jX) - \dot{I}_1(R + jX) - \dot{I}_2(R + jX)$$

所以,对于此电路,下式成立:

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2$$

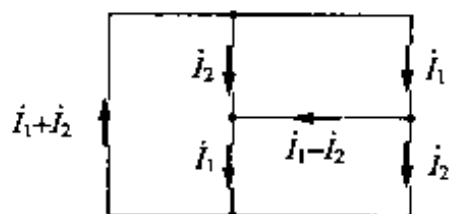


图 3.17

也就是说,如图 3.17 所示,两个电感上的电流相等。给式(3.23)乘以 R , 式(3.24)乘以 X , 联立两式,消去 I 可得

$$2R\dot{I}_1 = \dot{I}_2(R + jX) \quad (3.26)$$

由式(3.26)和式(3.25),可求出各个电流,其中

$$\dot{I}_1 = (R + jX)E / \{R(R + 3jX)\} \quad (3.27)$$

在频率为 0 即 X 为 0 的直流电路中,电感相当于短路,这与式(3.27) $\dot{E}/R$ 一致。如果频率非常高,当 $X \rightarrow \infty$ 时,电感相当于开路,这与 $\dot{I} = \dot{E}/3R$ 也一致。在实际计算时,最好也这样每计算几步,就确认一下计算的结果是否合乎道理,然后再进行后面的计算。

由式(3.25)、式(3.26)可计算出

$$\dot{I}_2 = 2\dot{E}/(R + j3X) \quad (3.28)$$

若为直流,则

$$\dot{I}_2 = 2\dot{E}/R$$

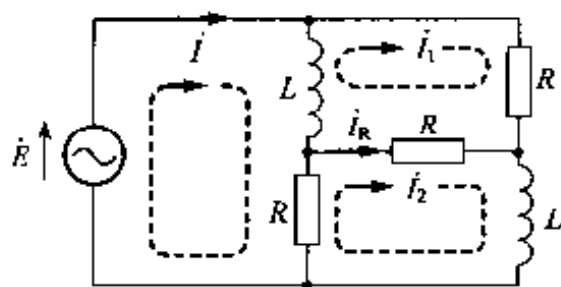


图 3.16

从图 3.17 可知, 流过电阻 R 的电流为 $\dot{E}/R$ 。计算结果与式(3.27)计算的相同。若为高频率, 则此电流为 0。由 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 可得出

$$\dot{I} = \dot{I}_1 + \dot{I}_2 = (3R + jX)\dot{E}/\{R(R + 3jX)\} \quad (3.29)$$

如果是直流, 则 $\dot{I} = 3\dot{E}/R$; 若为高频率, 则 $\dot{I} = \dot{E}/3R$ 。把 X 还原成 ωL , 那么入端阻抗为

$$Z = R(R + j\omega 3L)/(3R + j\omega L)$$

图 3.16 中的 I_R 为

$$\dot{I}_R = \dot{I}_2 - \dot{I}_1 = (R - jX)\dot{E}/\{R(R + j3X)\} \quad (3.30)$$

直流电时 $\dot{I}_R = \dot{E}/R$, 高频率时 $\dot{I}_R = -3\dot{E}/R$ (电流与图示方向相反)。

戴维宁定理

当某个电网络中接入负载 Z 时, 用戴维宁定理计算, 非常方便。它也称为等效电压源定理。下面举一个简单的例子加以说明。

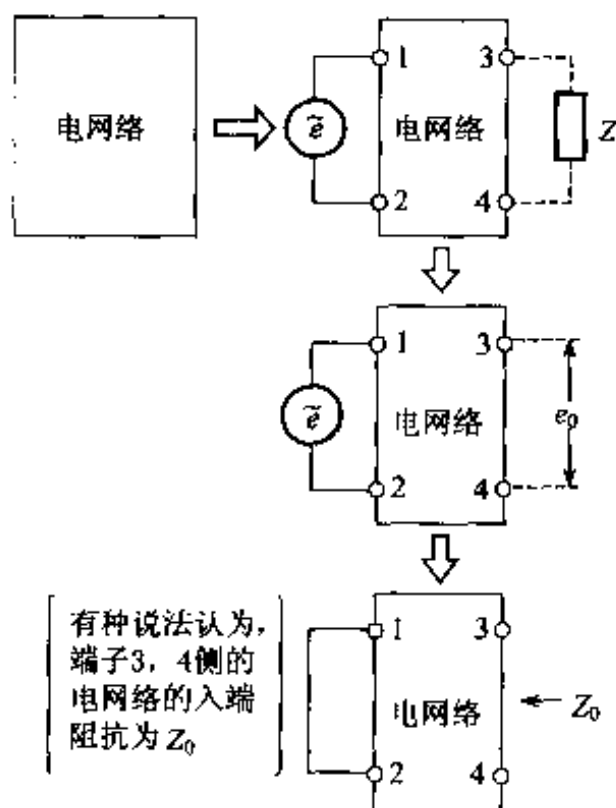


图 3-a

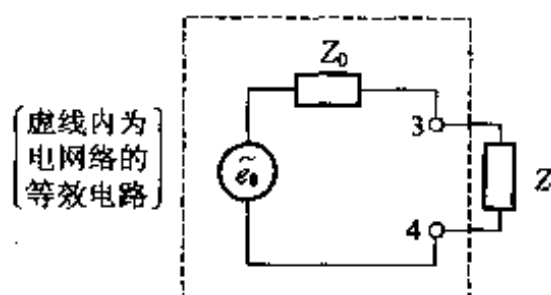


图 3-b

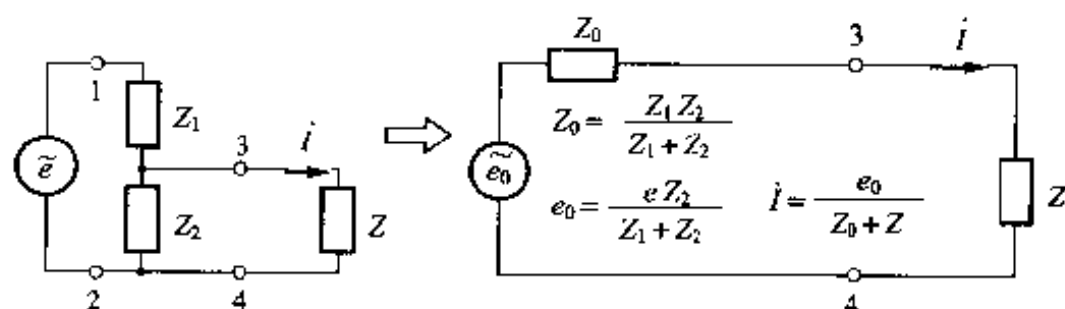


图 3-c

若有一个有源二端网络,当给此网络的输出端接入负载 Z 时,可通过将该二端网络变换成下面的等效电路来计算出流过负荷 Z 的电流。让我们把着眼点放在网络的电源端和负载端(分别为图 3-a 中 1、2 和 3、4)。先计算出来接入 Z 时端子 3-4 间的开路电压,再除去二端网络中的电源,即将 1-2 间短路后,求出端子 3-4 间的入端阻抗。

对负载 Z 来说,图 3-b 所示的网络与图 3-a 为等效电路,因此通过 Z 支路的电流为

$$\dot{I} = e_0 / (Z_0 + Z)$$

图 3-c 是一个简单的例子。图中标出了计算电流 $\dot{I}$ 的方法。

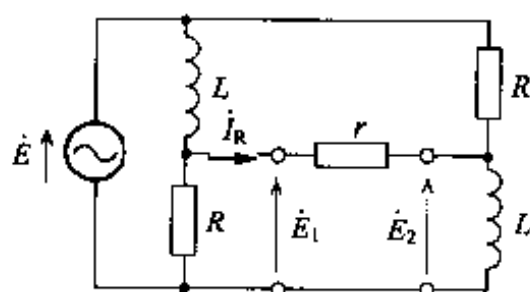


图 3.18

如果只想求出 $\dot{I}_R$, 那么用戴维宁定理尤为方便。以图 3.18 为例, 设中间的电阻为 r , 求 r 开路时 $(\dot{E}_1 - \dot{E}_2)$ 的值。因

$$\dot{E}_1 = \dot{E}R / (R + j\omega L)$$

$$\dot{E}_2 = \dot{E}j\omega L / (R + j\omega L)$$

故

$$\dot{E}_0 = \dot{E}_1 - \dot{E}_2 = \dot{E}(R - j\omega L) / (R + j\omega L)$$

将电源 $\dot{E}$ 处短路, 因 R 、 L 并联后再串联, 故入端阻抗为

$$Z = 2j\omega LR / (R + j\omega L)$$

因此, 用下面的方法可以简单地计算出 $\dot{I}_R$ 的值。

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{E}}{Z_0 + r}$$

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{E} \{ (R - j\omega L) / (R + j\omega L) \}}{\{ 2j\omega LR / (R + j\omega L) \} + r}$$

$$= \dot{E}(R-j\omega L)/\{(Rr+j\omega L)(r+2R)\} \quad (3.31)$$

实际上,在很多计算中,用戴维宁定理是非常方便的。

若以 R 替代式(3.31)中的 r ,那么式(3.31)与式(3.30)完全相同。

以上讨论了 RL 电路,它包括了所有交流电的稳态计算的基础知识。现总结如下:

(1) 感抗为 $j\omega L[\Omega]$ 的电感(容抗为 $1/j\omega C[\Omega]$ 的电容)与电阻串、并联的电路,其计算方法与直流电路一样,按串、并联的连接方式计算;以 $R \pm jX$ 的形式求出阻抗。

(2) 可以把 Z 看作是直流电路中的电阻,从 $\dot{E}$ 或 $\dot{I}$ 求出有关数值。

(3) 计算出的结果通常是含有 j 的复数,因此有时需求其绝对值。

(4) 计算功率时须考虑功率因数。

(5) 对于用串、并联方法不能计算出阻抗的电路,与直流电路一样,可根据基尔霍夫定律、戴维宁定理计算。

(6) 对含有不同频率的多个电源电路的计算,此处不列为讨论内容。若几个电源仅相位不同,可用 j 表示出它们的相位关系,再进行计算。

● 3.9.3 RC 电路

下面讨论电阻与电容串联的电路中电压、电流及阻抗的关系。在图 3.19 所示的电路图和相量图中, E 为电压, I 为电流,下角为电阻(R)和电容(C)。因

$$\dot{E} = \dot{E}_R + \dot{E}_C = \dot{I}R - j\dot{I}/\omega C$$

故电路的阻抗

$$Z = \dot{E}/\dot{I} = R - j/\omega C$$

是电阻和电容的电抗值之和。

这与电阻串联电路中,总电阻为各个电阻之和的结论完全相同。整理后, $\dot{E}$ 、 $\dot{I}$ 、 Z 的关系为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I} &= \dot{E}/Z = \dot{E}/(R - j/\omega C) [A] \\ Z &= \sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2} [\Omega] \end{aligned} \right\} \quad (3.32)$$

此电路的视在功率为 $EI[VA]$,有功功率为 $E_R I[W]$,无功功率为 $E_C I[\text{var}]$ 。

电路中只有电阻消耗能量,电容在每一瞬间和电源进行能量交换,所以电容的平均功率为 0。

$$\dot{E} = \dot{E}_R + \dot{E}_C$$

$$E_R/E = IR/IZ = \cos\phi$$

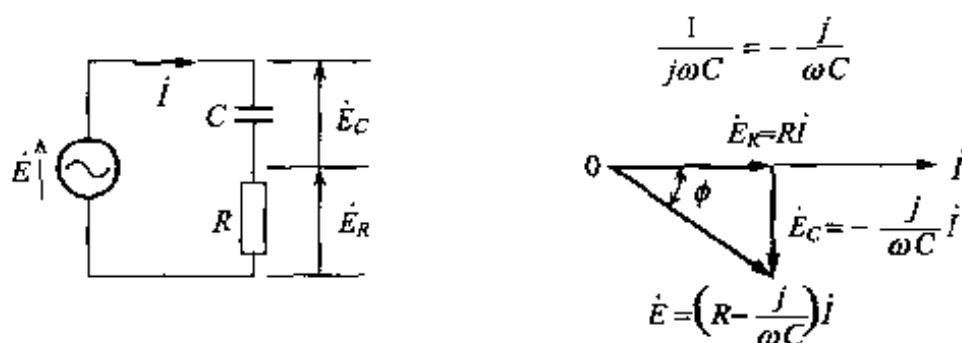


图 3.19 RC 串联电路和相量图

下面讨论电阻与电容并联的电路。电路图与相量图如下图 3.20 所示。

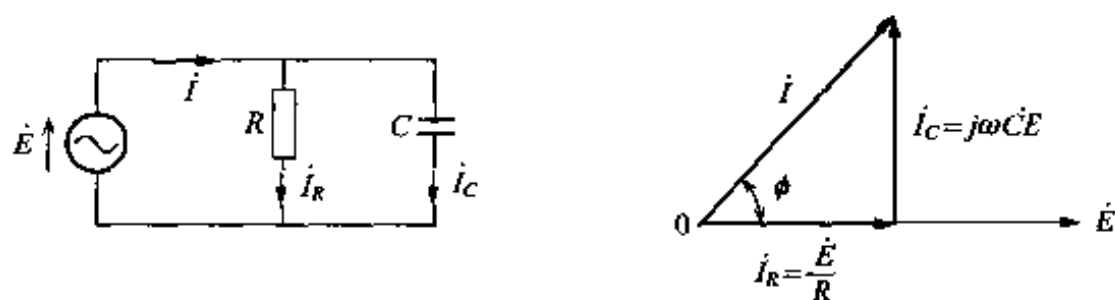


图 3.20 RC 并联电路和相量图

由 $\dot{I} = \{(1/R) + (j\omega C)\} \dot{E}$ 可知,入端阻抗的倒数为

$$1/Z = (1/R) + j\omega C = (1 + j\omega CR)/R$$

即入端阻抗为

$$Z = R/(1 + j\omega CR)$$

频率低时,电阻起主导作用;频率高时,电容起主导作用。因

$$Z = R/\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} \text{ } [\Omega]$$

故

$$I = E\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}/R \text{ } [\text{A}]$$

由此可知,当电阻非常小或电容的容量非常大时,电流很大。视在功率 S 为

$$P_s = EI = E^2 \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} / R$$

或

$$EI = I^2 R / \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

由

$$Z = R / (1 + j\omega CR), \quad Z = R / \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

可知,功率因数为

$$\cos\phi = R/Z = \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}$$

有功功率为

$$P = EI \cos\phi = E^2 \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2} / (R \sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}) = E^2 / R \quad [\text{W}]$$

或

$$P = EI \cos\phi = I^2 R / (\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2})^2 = I^2 R / (1 + \omega^2 C^2 R^2)$$

当然,只有电阻消耗有功功率。

$I^2 R / (1 + \omega^2 C^2 R^2)$ 应该等于 $I_R^2 R$ 。因 $\dot{I}_R = \dot{E} / R$, $\dot{I} = E(1 + j\omega CR) / R$, 故 $\dot{I}$ 与 $\dot{I}_R$ 的绝对值之比为 $\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2}$, 所以 $I^2 R / (1 + \omega^2 C^2 R^2) = I_R^2 R$ 。

● 3.9.4 RLC 电路

1 RLC 串联电路

同时含有电阻、电感、电容的电路,其计算方法与只含有电阻和电感或电阻和电容的电路的计算方法相同,只是电感的感抗 $j\omega L$ 和电容的容抗 $1/j\omega C = -j/\omega C$ 会发生抵消作用。

就联接方式来说,有电感与电容串联和电感与电容并联两种,因此,下面分别讨论 RLC 串联电路和 RLC 并联电路。

首先,讨论图 3.21 所示的串联电路。图中,电感的感抗 $j\omega L$ 大于电容的容抗 $-j/\omega C$, 因而 $\dot{E}_L + \dot{E}_C$ 超前电流 90° 。它与 RL 串联电路的相量图相同。若 $-j/\omega C$ 大于 $j\omega L$, 则 $\dot{E}_L + \dot{E}_C$ 的方向向下,它与 RC 串联电路的相量图相同。

阻抗 Z 可表示为

$$Z = R + j(\omega L - 1/\omega C)$$

或

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

若 $\omega L = 1/(\omega C)$, 即感抗与容抗相等, 或电源的角频率为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 时, $Z = R$, 阻抗值为最小, 电抗分量消去。

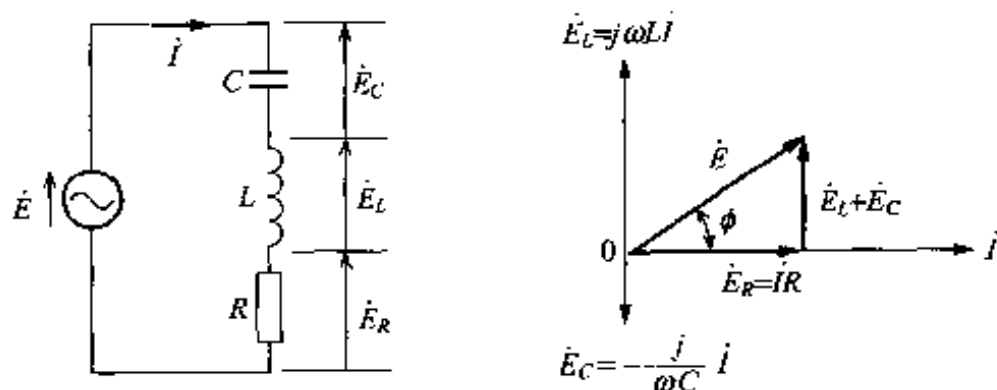


图 3.21 RLC 串联电路和相量图

当选择较小电阻 R , 电源里有不同角频率存在时, 只有在角频率为 $1/\sqrt{LC}$ 的电源作用下, 才出现大电流, 因此此电路常常用作收音机、电视机的调谐电路。

串联电路中, 如果 R 为 0, 电源的阻抗也为 0, 那么从理论上讲, 电源的角频率为 $1/\sqrt{LC}$ 时, 电路的阻抗为 0, 电流为无限大。

当接上角频率只为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 的电源时, $\dot{E}_L$ 与 $\dot{E}_C$ 都不为 0, 此时

$$\dot{E}_L = j\omega L \dot{I} = j\sqrt{L/C} \dot{I}$$

$$\dot{E}_C = -(j/\omega C) \dot{I} = -j\sqrt{L/C} \dot{I}$$

$\dot{E}_L$ 与 $\dot{E}_C$ 是两个相位差为 180° 的电压, 因此 $\dot{E}_L + \dot{E}_C = 0$ 。 $\dot{I} = \dot{E}/R$, 它取决于电阻的大小。 $\dot{E}_L$ 与 $\dot{E}_C$ 分别为

$$\dot{E}_L = -j \dot{E} \sqrt{L/C} / R$$

$$\dot{E}_C = j \dot{E} \sqrt{L/C} / R$$

根据 L 、 C 、 R 的不同值, $\dot{E}_L$ 、 $\dot{E}_C$ 有时比 $\dot{E}$ 大, 所以在实际生活中应注意它们的耐压性。

当电路的一部分为 RLC 串联电路时, 此部分对于 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 的角频率来说, 阻抗最小。商用电源上, 当电源的高次谐波频率与此角频率一致时,

有时会在这部分负载中产生高次谐波,导致负载的一部分中有大的高次谐波电流,从而导致负载过热等危害,而且也有可能对其他机器产生感应而造成故障。

2 RLC 并联电路

图 3.22 表示了 RLC 并联电路的电路图和相量图。图中,设电容的容抗 $1/(\omega C)$ 比电感的感抗 ωL 小,即 $|\dot{I}_C| > |\dot{I}_L|$ 。若与此相反,则 $(\dot{I}_C - \dot{I}_L)$ 的箭头应向下,与 RL 并联电路的相量图相同。

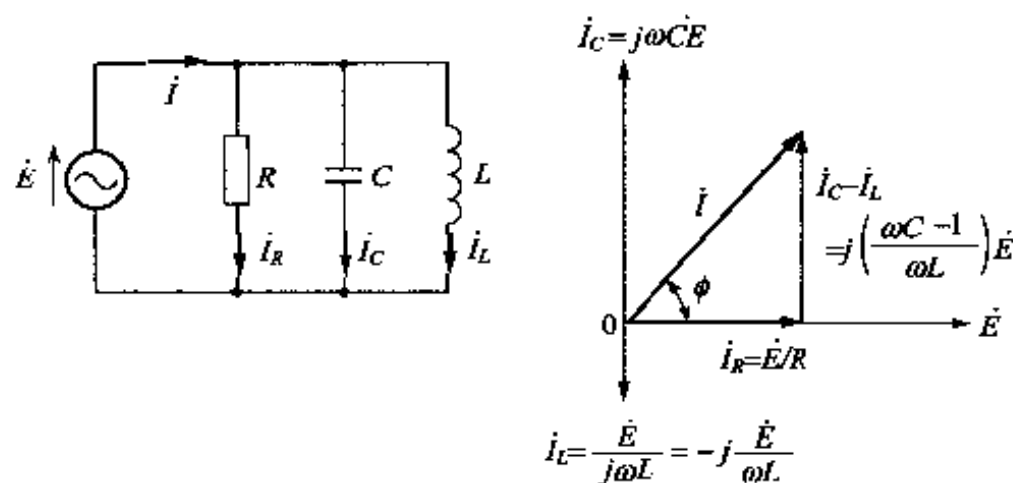


图 3.22 RLC 并联电路和相量图

设只有电感和电容并联的电路中的阻抗为 Z_{CL} , 那么由

$$1/Z_{CL} = j\omega C + (1/j\omega L)$$

可知,

$$Z_{CL} = j\omega L / (1 - \omega^2 LC)$$

此时,若角频率为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 则 Z_{CL} 为无限大,从电源处流出的电流不经过它。不过,图 3.22 中,因 $(\dot{I}_C - \dot{I}_L)$ 为 0,而 $\dot{I}_C$ 、 $\dot{I}_L$ 又不为 0,因此电感与电容上的电流互为反相电流。 $\dot{I}_C$ 、 $\dot{I}_L$ 的大小,可由下式求出:

$$\dot{E} = \dot{I}_C / (j\omega C) = \dot{I}_L j\omega L$$

电路的总阻抗 Z 为

$$1/Z = (1/R) + (1/j\omega L) + j\omega C$$

$$Z = \frac{R\{\omega^2 L^2 + j(1 - \omega^2 CL)\}}{R^2(1 - \omega^2 CL)^2 + \omega^2 L^2}$$

若角频率为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ [rad/s], 则

$$1 - \omega^2 CL = 0$$

$$Z = R$$

在 LC 并联电路中, 当角频率为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 时, 阻抗为无限大。所以, 若不想给某电路加上某角频率的电压, 或要阻止某角频率的电流通过时, 都可以给此电路串联上一个 LC 并联电路。

在上面所讨论的 RLC 电路中, 因为角频率为 $\omega = 1/\sqrt{LC}$ 时, 电容的电场能量与电感的磁场能量之间进行着等量转换, 此现象称为谐振。这种转换类似于振子的振动势能和动能的相互转换。

关于谐振随时间的变化问题, 可根据过渡现象的理论知识通过求解微分方程得出。理论上, RLC 串联电路时 R 越小, 或 RLC 并联电路时 R 越大, L - C 之间在能量的转换过程中损失的能量就越小, 谐振越激烈, 过渡时间也越长。

● 3.9.5 互感电路

图 3.8 所示的电路是具有简单互感现象的电路, 式 (3.13) 为其稳态值的计算式。式中的 I_1 、 I_2 可由下式求出:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}(R_2 + j\omega L_2)}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} \quad (3.33)$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}(-j\omega M)}{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} = \frac{-j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} \dot{I}_1 \quad (3.34)$$

由式 (3.33) 可得出入端阻抗为

$$\begin{aligned} Z = \frac{\dot{E}}{\dot{I}_1} &= R_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2} \\ &= \left(R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} R_2 \right) + j\omega \left(L_1 - \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2} L_2 \right) \end{aligned} \quad (3.35)$$

或

$$\begin{aligned} Z &= \frac{(R_1 + j\omega L_1)(R_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2} \\ &= \frac{R_1 R_2 + j\omega(L_1 R_2 + L_2 R_1) + \omega^2(M^2 - L_1 L_2)}{R_2 + j\omega L_2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Z 的表达式之所以复杂, 是因为 L_1 与 L_2 在磁耦合时, 一个线圈中电流

的变化在另一个线圈中产生了互感电压。由电感的电流可知,频率愈高,产生磁通的电流愈小。当两个线圈完全耦合时

$$M = \sqrt{L_1 L_2}$$

为了简单一些,令 $L_1 = L_2 = L$, 因此,当 ω 非常大时,从式(3.36)可知

$$Z \approx j\omega L(R_1 + R_2) / j\omega L = R_1 + R_2$$

在变压器的设计上,通常给线圈通以不大的励磁电流,而且把初级线圈的电阻 R_1 也设计得较小,从而使得 $Z \approx R_2$ 。图 3.8 所示的电路中消耗的功率 P 为

$$P = I_1^2 (R_1 + \frac{\omega^2 M^2}{R_2^2 \omega^2 L_2^2} R_2) = I_1^2 R_1 + I_2^2 R_2$$

从电器的角度来说,由互感 M 耦合的电路是几个绝缘的电路。但是,为了计算上的方便,也常常把它们当作是等效并联接在一起的电路。令图 3.23 中

$$Z_1 + Z_3 = R_1 + j\omega L_1, Z_3 = j\omega M$$

$$Z_2 + Z_3 = R_2 + j\omega L_2$$

那么它与图 3.8 所示的电路为等效电路。因此,下式成立:

$$Z_1 = R_1 + j\omega(L_1 - M)$$

$$Z_2 = R_2 + j\omega(L_2 - M)$$

有些情况下, $(L_1 - M)$ 和 $(L_2 - M)$ 可能其中之一为负值,所以尽管在理论上图 3.23 与图 3.8 为等效电路,实际上,局部并不等效。由式(3.35)可知,入端阻抗为

$$Z = (R_1 + j\omega L_1) + \omega^2 M^2 / (R_2 + j\omega L_2)$$

因此,即使 M 变成原来的 a 倍, $(R_2 + j\omega L_2)$ 原来的 a^2 倍,而 Z 及 $\dot{I}_1$ 都不会发生任何变化。也就是说,对于电源 $\dot{E}$, 负载仍然相同。变压器如同同一铁心上的两个线圈,若 $\dot{I}_1$ 侧初级端匝数为 $\dot{I}_2$ 侧次级端匝数的 n 倍,且完全耦合时

$$L_2 = n^2 L_1$$

$$M = \sqrt{n^2 L_1^2} = n L_1$$

如果 M 为原来的 $1/n$ 倍,则 $Z_1 = R_1$, 如果 $(R_2 + j\omega L_2)$ 为原来的 $1/n^2$, 则

$$Z_2 + Z_3 = \{(R_2/n^2) + j\omega L_1\}$$

在这种条件下,从电源一侧看,图 3.23 与图 3.24 等效。

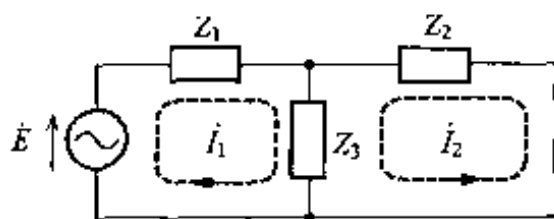


图 3.23

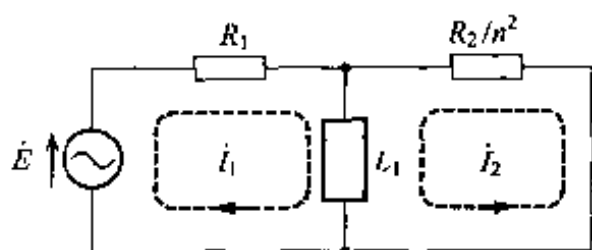


图 3.24

全耦合且 n 足够大时,次级端阻抗乘以初级端线圈与次级端线圈匝比的平方,就可以变化到变压器的初级端。次级端阻抗乘以初级端与次级端匝比的平方,就可以变换到变压器的初级端。图 3.24 的电路中

$$\dot{I}_1 = \dot{E}(R_2/n^2 + j\omega L_1) / [(R_1 R_2/n^2) + j\omega L_1 (R_1 + R_2/n^2)]$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{E}j\omega L_1 / \{(R_1 R_2/n^2) + j\omega L_1 (R_1 + R_2/n^2)\}$$

L_1 上的电流 $I_1 + I_2$ 为

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{E}R_2/n^2 / \{(R_1 R_2/n^2) + j\omega L_1 (R_1 + R_2/n^2)\}$$

为了检查结果是否合理,令 $R_1 = 0$, 则

$$\dot{I}_1 = \dot{E}(R_2/n^2 + j\omega L_1) / j\omega L_1 R_2/n^2 = \dot{E} \{ (1/j\omega L_1) + (1/R_2/n^2) \}$$

$$\dot{I}_2 = -\dot{E}j\omega L_1 / j\omega L_1 R_2/n^2 = -\dot{E}/R_2/n^2$$

$$\dot{I}_1 + \dot{I}_2 = \dot{E}(R_2/n^2) / j\omega L_1 R_2/n^2 = \dot{E}/j\omega L_1$$

$\dot{I}_1$ 是流过负载 R_2 的电流与产生磁通的电流 $\dot{I}_1 + \dot{I}_2$ 之和,可见符合物理意义。

►► 练习题

习题 1

给 100V 的交流电源接上一个功率因数为 1 的 100W 的负载,电流的最大瞬时值为多少?

习题 2

给 100V 的交流电源接上一个功率因数为 0.5 的 100W 负载,求回路电流。

习题 3

有一个电感线圈,测得直流电阻为 5Ω ,接上 100V、50Hz 的电源后,通过电感线圈

的电流为 10A ,求此线圈的电感值。

习题 4

有一个电阻和电感串联的电路,电阻值和电感值相同。给此电路接上 50Hz 或 60Hz 的相同电压的交流电,问在这两种情况下,下面哪些叙述是正确的:

- (1) 因为电阻和电感大小相同,所以它们的电流也相同。
- (2) 50Hz 时的功率因数大。
- (3) 60Hz 时的功率因数大。
- (4) 两者的视在功率相同。
- (5) 若电流为 I 、电阻为 R ,则功率为 $I^2 R$ 。

习题 5

求图 3.25 所示的 R_3 - L_3 串联电路的电压、电流及功率。

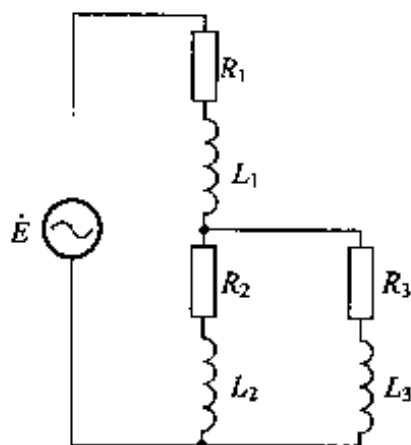


图 3.25

第 4 章 三相交流电路

在第 3 章中,我们只讨论了电源与负载之间由两根导线连接的单相交流电路的计算方法。家庭中使用的 100V 电压就是这种单相交流电。而进行大规模输电时,常常采用三相交流电。

本章介绍三相交流电的性质,讨论电流、电压和功率等的计算方法。

4.1 三相交流电

● 4.1.1 三相交流电的概念

三相交流电与单相交流电不同,流过三根导线的电流的频率相同,相位不同,三线间电压的相位也不同。

那么,流过三根导线上的电流为多少呢?

图 4.1 表示了三相交流电的三个电流的波形。从图中可以看出,三相交流电的各相的电流 i_A 、 i_B 、 i_C 的大小相等,频率相同,相位差互为 $2\pi/3$ [rad] (120°)。

发电厂生产的三相交流电,由输电线输送到家庭附近。

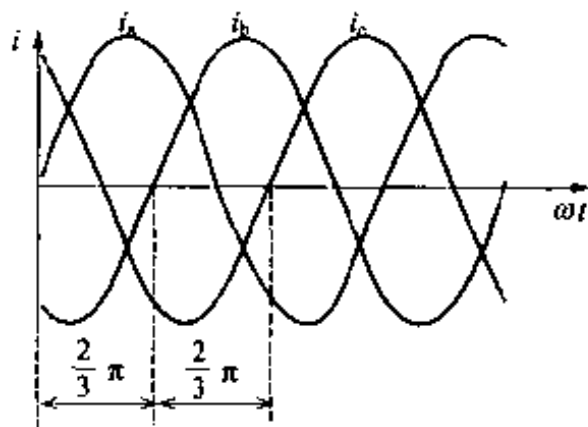


图 4.1 三相交流电的电流波形

● 4.1.2 三相交流电的产生

一台发电机就可以产生三相交流电。我们已在第 3 章学习了通过固定绕组、旋转磁场的单相交流电的产生原理。

图 4.2(a)所示为三相交流发电机的结构示意图。如图所示,三个绕组

(A-A'、B-B'、C-C')在空间位置上彼此相差 120° , 旋转中间的转子时, 每个绕组就会产生大小和频率相同、相位差互为 $2\pi/3$ [rad] 的电动势, 这就是三相交流电的产生, 其波形如图(b)所示。

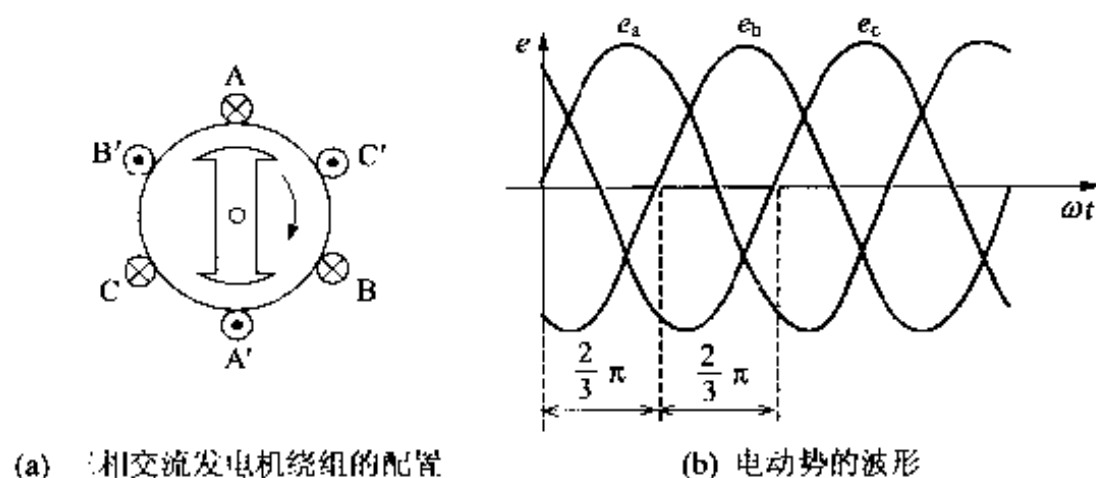


图 4.2 三相交流发电机绕组的配置与电动势的波形

● 4.1.3 可用三根线输电的原因

三个单相电路组合起来向外输电时, 需要 6 根电线(图 4.3(a))。将图 4.3(b)所示三根回流线合并为成一根中线(图 4.3(c))。如果各相的负载相等, 那么, 从各电源流出的电流的大小也相等, 彼此间的相位差为 $2\pi/3$ [rad], 三个电流之和为 0。由于中线上没有电流通过, 因此可省去中线, 也就是说可以用三根线来连接三个单相电路(图 4.3(d))。

● 4.1.4 广泛应用三相交流电的原因

广泛使用三相交流电是由于它具有以下优点:

- ① 三相交流电可由三根线进行输电, 能够节省电线。
- ② 由于使用的输电线少, 因此减少了电线电阻上的功率损耗。
- ③ 容易产生旋转磁场(三相感应电动机, 三相同步电动机), 第 6 章将论述旋转磁场。

● 4.1.5 三相交流电的电压与电流

图 4.4 是对称三相交流电压的波形。从图中可以看出, 任一时刻各电

压瞬时值之和等于 0。以 a 相为参考相, 由于各电压之间的相位差互为 $2\pi/3[\text{rad}]$, 因此各相电压瞬时值的表达式为

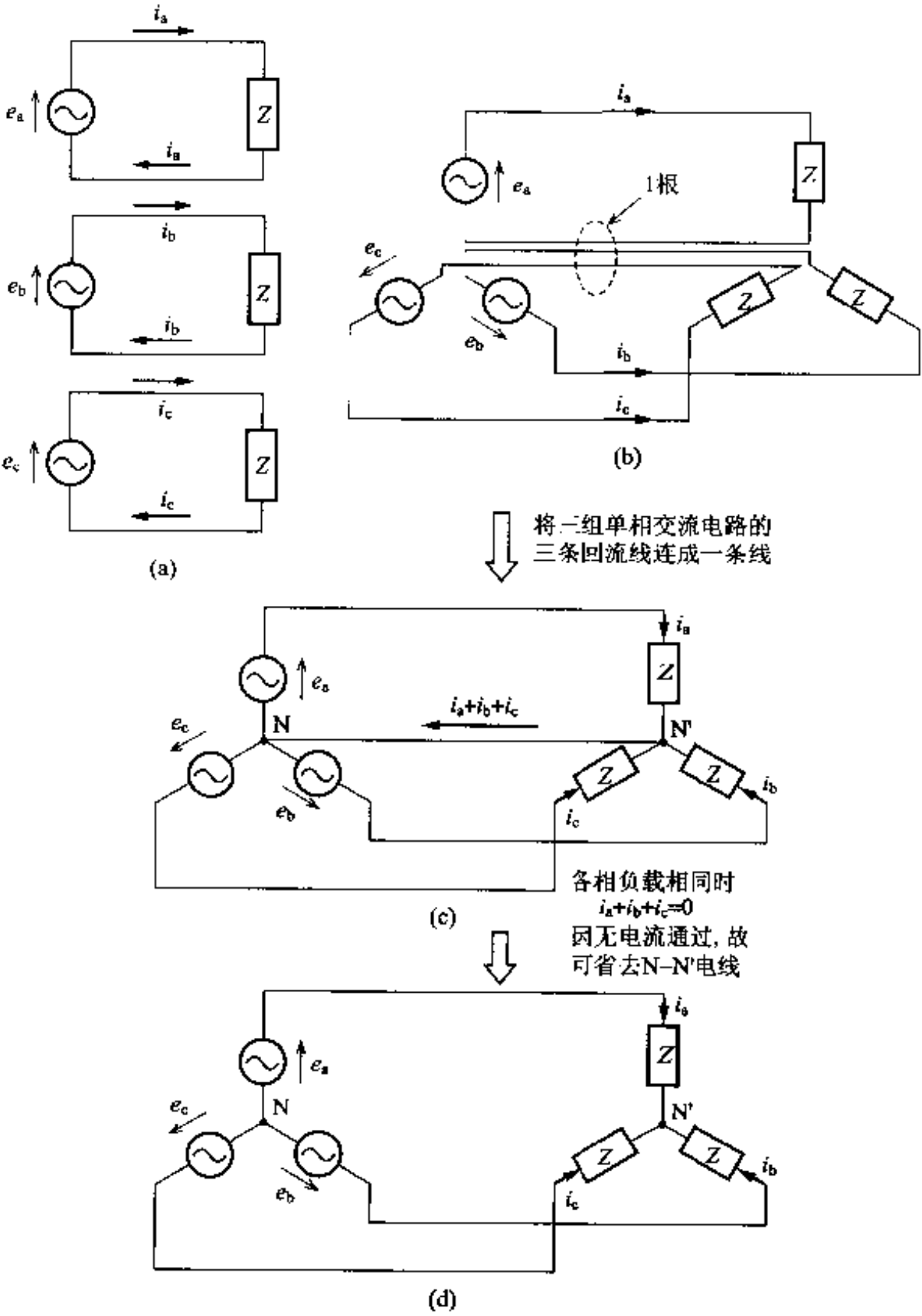


图 4.3

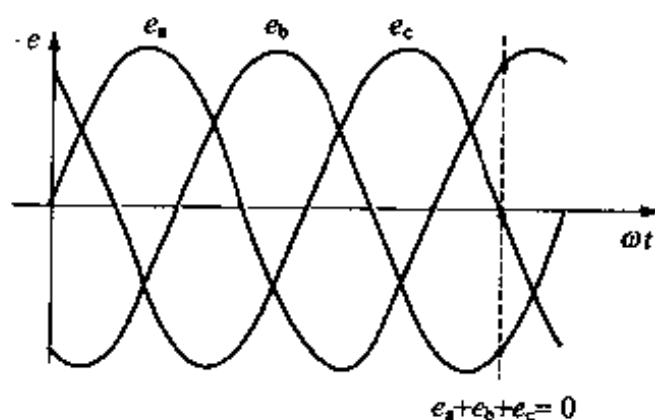


图 4.4 三项交流电压的波形

$$\left. \begin{aligned} e_a &= \sqrt{2}E \sin \omega t \text{ [V]} \\ e_b &= \sqrt{2}E \sin \left(\omega t - \frac{2}{3}\pi \right) \text{ [V]} \\ e_c &= \sqrt{2}E \sin \left(\omega t - \frac{4}{3}\pi \right) \text{ [V]} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

其中, E 为有效值。

三个电压之和为

$$e_a + e_b + e_c = 0 \quad (4.2)$$

下面用相量图表示三相交流电的电压与电流。以 a 相的电压为参考电压, 则各相电压的极坐标和直角坐标(复数)表示法如下所示, 电流与电压的表示方法相同:

极坐标表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_a &= E \angle 0 \text{ [V]} \\ \dot{E}_b &= E \angle -\frac{2}{3}\pi \text{ [V]} \\ \dot{E}_c &= E \angle -\frac{4}{3}\pi \text{ [V]} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

直角坐标表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_a &= E \text{ [V]} \\ \dot{E}_b &= E \left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ [V]} \\ \dot{E}_c &= E \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ [V]} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

相量图如图 4.5 所示。电压相量之和为

$$\dot{E}_a + \dot{E}_b + \dot{E}_c = 0 \quad (4.5)$$

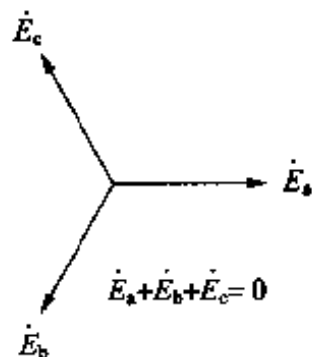


图 4.5 三相交流电压的相量图

相量的极坐标表示

把有效值为 V [V]、相位角为 θ 的电压相量 $\dot{V}$ 表示为

$$\dot{V} = V \angle \theta \text{ [V]}$$

的方法称为极坐标表示。

对称的三相交流电,因各相的电压大小相等,相位不同,所以如果将其表示为极坐标形式,就可以很直观地看出各个相电压之间的相位关系。以 a 相的电压作为参考电压,则三相交流电压的极坐标的表达式为

$$\dot{E}_a = E \angle 0, \quad \dot{E}_b = E \angle -2\pi/3, \quad \dot{E}_c = E \angle -4\pi/3$$

只要进行下面的变换,就可以将极坐标表示转换为直角坐标表示:

$$\dot{V} = V \angle \theta \rightarrow \dot{V} = V(\cos\theta + j\sin\theta)$$

● 4.1.6 相序(或相旋转)

在图 4.4 中,当三个电动势达到最大值的先后顺序为 e_a 、 e_b 、 e_c 时,此三相交流电的相序为 a-b-c。

图 4.6 所示的三相交流电的波形与图 4.4 有所不同。图 4.6 中, e_c 先于 e_b 达到最大值,因此其相序为 a-c-b。如图 4.7 所示,通过相量图比较图 4.4 与图 4.6 的交流电压,可以很清楚地看出它们相序上的不同。在运转三相电动机、三相变压器等时,相序非常重要。

三相电动机的旋转方向取决于电源的相序。这是因为旋转磁场的方向是由相序决定的,如果电源的相序相反,则电动机的旋转方向也与原来相反。另外,当三相交流发电机或三相变压器并联运转时,如果它们的相序不

同,就会发生短路现象,所以必须将相序调整成一致。

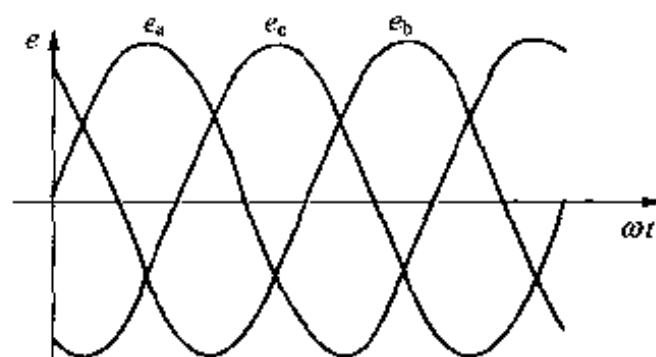


图 4.6 相序为 a-c-b 时三相交流电压的波形

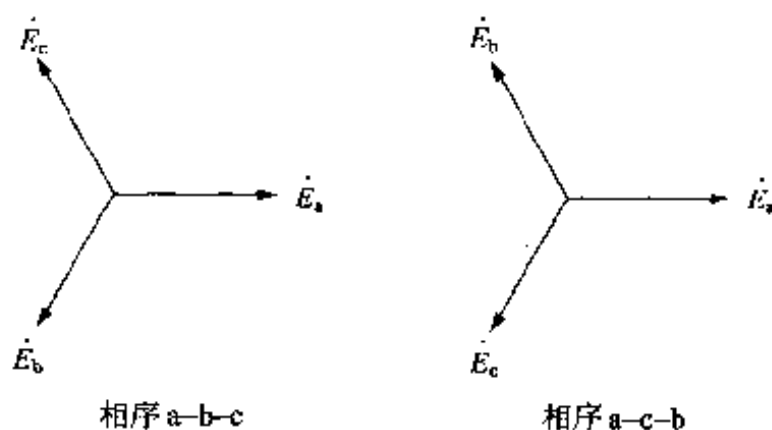


图 4.7 不同相序的相量图

4.2 三相电路的联接

4.2.1 电源和负载的联接

1 线电压与线电流

如图 4.8 所示,把电源和负载用三根电线联接时,电线间的电压称为线电压。流过电线的电流称为线电流。一般情况下,用线电压表示三相电路的电压。例如,三相 6kV 的配电线,就表示其线电压为 6kV。

各线电压之间和各线电流之间存在下列关系:

$$\text{线电流: } \dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0 \quad (4.6)$$

$$\dot{V}_{ab} + \dot{V}_{bc} + \dot{V}_{ca} = 0$$

(4.7)

它们与电源或负载的联接方式无关。

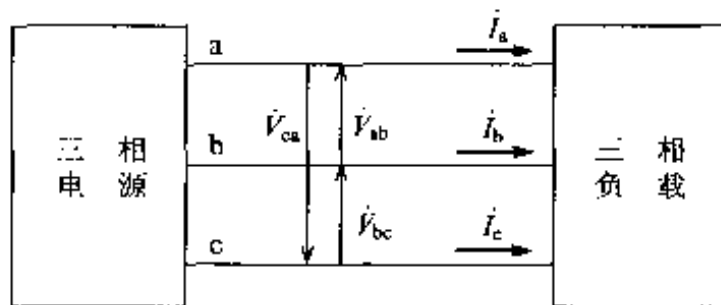


图 4.8 线电流和线电压

2 三相电路的联接方法及相电压、相电流

把单相电路联接成三相电路时有两种联接方法,如图 4.9 所示。将三个末端连接在一起的方法叫做 Y 形连接或星形连接 (star 连接),把 N 点叫做中性点,如图 4.9(a) 所示。把各相首尾依次相连,使其形成一个环状闭合回路,这种方式称为 Δ 形接法 (delta 接法) 或三角形接法,如图 4.9(b) 所示。

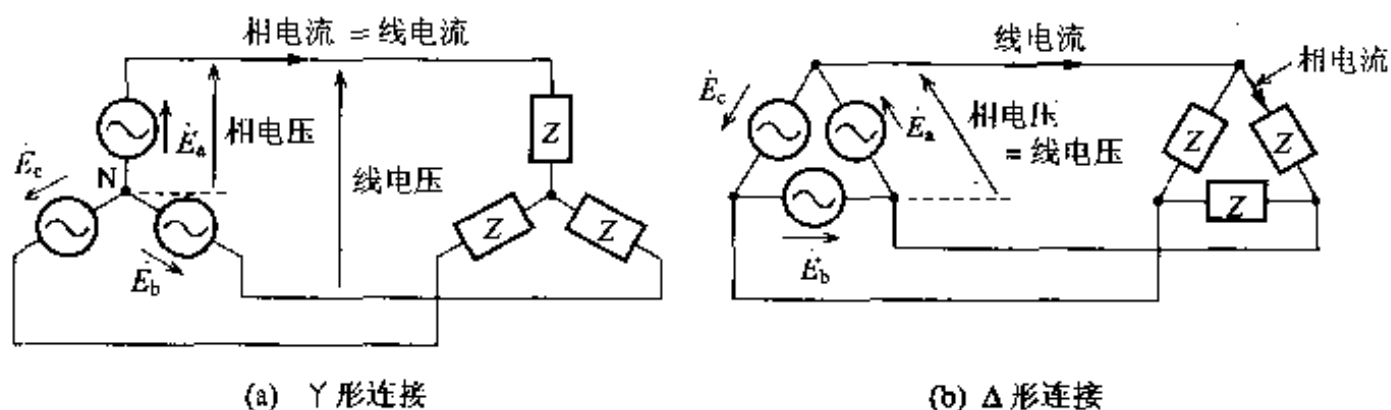


图 4.9

三相电路各相的电压叫做相电压,各相的电流叫做相电流。需要注意的是,在不同方式的连接中,相电流与线电流之间的关系也不同。

3 对称三相电路和非对称三相电路

把大小相等、频率相同、相位差互为 $2\pi/3$ 的三相交流电动势称为对称

三相交流电动势。另外,如图 4.9 所示,各相阻抗相等的对称三相负载称为平衡三相负载。

三相电源是对称三相电动势的对称电源,负载是平衡三相负载,由这样的电源和负载连接起来的电路称为对称三相电路或平衡三相电路。电源不是对称电源、负载也不是对称负载的电路就称为不对称三相电路或不平衡三相电路。

电源和负载的连接方式不只有 Y-Y、 Δ - Δ 接法。有时也会出现如下几种接法:Y 电源- Δ 形负载,或 Δ 电源-Y 形负载。

● 4.2.2 Y 形接法时线电压与相电压、线电流与相电流的关系

从图 4.10 可以看出,Y 形接法时,线电流等于相电流。下面讨论相电压与线电压的关系。

由图 4.11 可知,Y 形连接时,线电压 $\dot{V}_{ab}$ 与相电压 $\dot{E}_a$ 、 $\dot{E}_b$ 的关系如下:

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{ab} &= \dot{E}_a + (-\dot{E}_b) = \dot{E}_a - \dot{E}_b \\ \dot{V}_{bc} &= \dot{E}_b - \dot{E}_c \\ \dot{V}_{ca} &= \dot{E}_c - \dot{E}_a \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

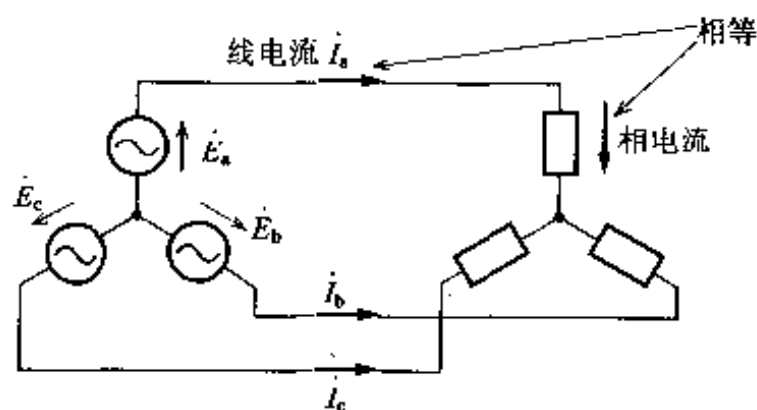


图 4.10 Y 形接法时的线电流与相电流

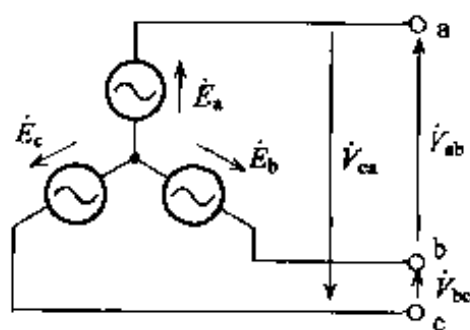


图 4.11 Y 形接法时的
线电压与相电压

Y 形接法与 Δ 形接法

Y 形接法与 Δ 形接法各有所长,各有所短,我们要根据它们的优缺点,来选择合适的连接方式。

Y 形接法中,中性点可以接地,因此不仅可以防止一线接地发生故障时产生危险电

压,也可以在接地发生故障时确保保护继电器正常工作,而且接地还有利于绝缘。因此,在高压时常使用Y形接法。

Δ 形接法的一大优点是,不会发生由三次谐波引起的故障。在变压器的励磁电流中,一般含有三次谐波的失真波,如果励磁电流中没有三次谐波,那么磁通就不会产生三次的正弦波,而感应电动势也就不会含三次正弦波。在 Δ 形连接时因为三次谐波的电流的各相相位相同,所以在 Δ 的连线中流过的电流是三次谐波的环形电流,从而消除了三次谐波的影响,使感应电动势为正弦波。

另外, Δ 形连接时,线电流是各单相变压器额定电流的 $\sqrt{3}$ 倍,因此这种接法适合用于低电压、大电流的场合。

不过,由于 Δ 形接法时没有中性点,所以如果要有中性点接地,就需要使用接地用变压器。

图 4.12(a)为Y形接法时线电压与相电压的相量图。

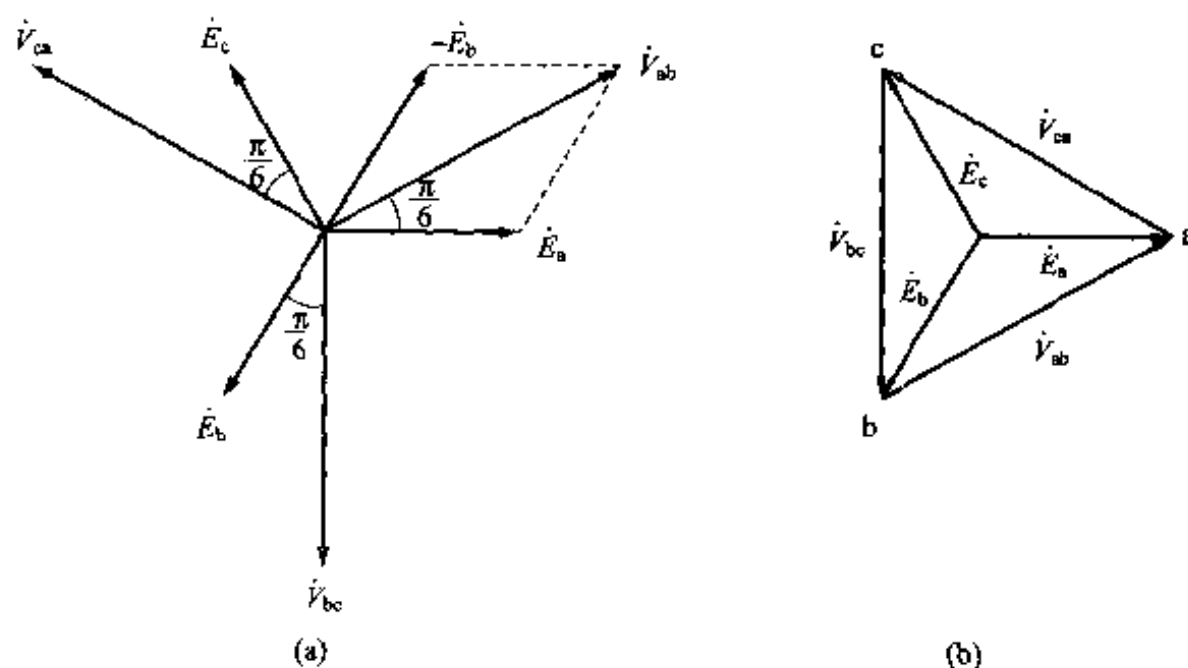


图 4.12 Y形接法时线电压与相电压的相量图

Y形接法时,线电流与相电流相等,线电压 $\dot{V}_{ab}$ 、 $\dot{V}_{bc}$ 、 $\dot{V}_{ca}$ 是相电压 $\dot{E}_a$ 、 $\dot{E}_b$ 、 $\dot{E}_c$ 的 $\sqrt{3}$ 倍,在相位上超前相电压,用相量极坐标表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_a &= E \angle 0 \\ \dot{V}_{ab} &= \sqrt{3}E \angle \pi/6 \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

其中, E 为相电压

线电压与相电压的相量关系也可由图 4.12(b) 表示。

● 4.2.3 $\triangle$ 形接法时线电压与相电压、线电流与相电流的关系

从图 4.13 可以看出, $\triangle$ 形接法时, 各电源的电压就是线电压, 因此加在各负载上的电压也就是线电压。

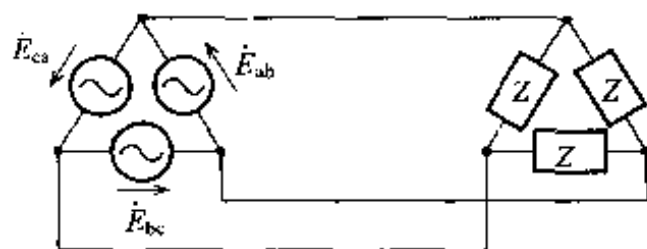
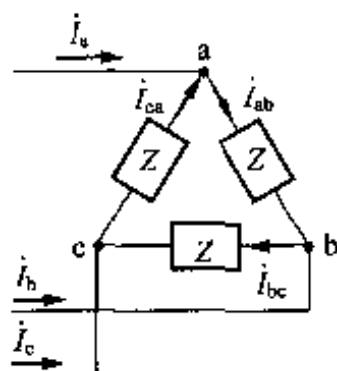


图 4.13 $\triangle$ 形接法

下面从负载端看相电流与线电流的关系。

如图 4.14 所示, 设流入 a 点的线电流为 $\dot{I}_a$, 相电流为 $\dot{I}_{ab}$ 、 $\dot{I}_{ca}$ 。对于 a 点, 由基尔霍夫定律可知, 线电流与相电流的关系为



$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_a &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_b &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_c &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

图 4.14 相电流与线电流 $\triangle$ 形接法时线电压等于相电压, 线电流 $\dot{I}_a$ 、 $\dot{I}_b$ 、 $\dot{I}_c$ 的大小是相电流 $\dot{I}_{ab}$ 、 $\dot{I}_{bc}$ 、 $\dot{I}_{ca}$ 的 $\sqrt{3}$ 倍, 相位落后 $\pi/6$ [rad]。图 4.15 为各线电流与相电流的相量图。

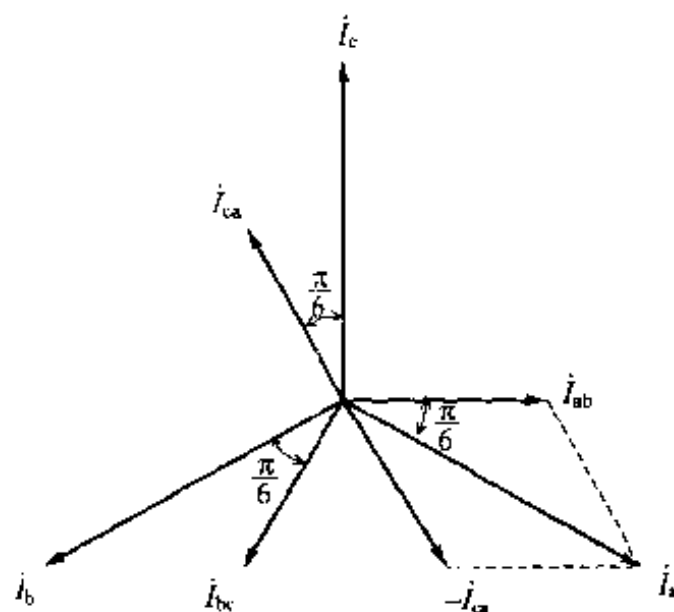


图 4.15 相电流和线电流的相量图

● 4.2.4 V 形接法时线电压与相电压、线电流与相电流的关系

当 Δ 形接法的电源提供的是对称三相交流电时,如取掉其中的一相,剩下的两个电源仍能够提供三相交流电,如图 4.16 所示。把这种连接方式称为 V 形接法。

那么,为何两个电源能够提供三相交流电呢?

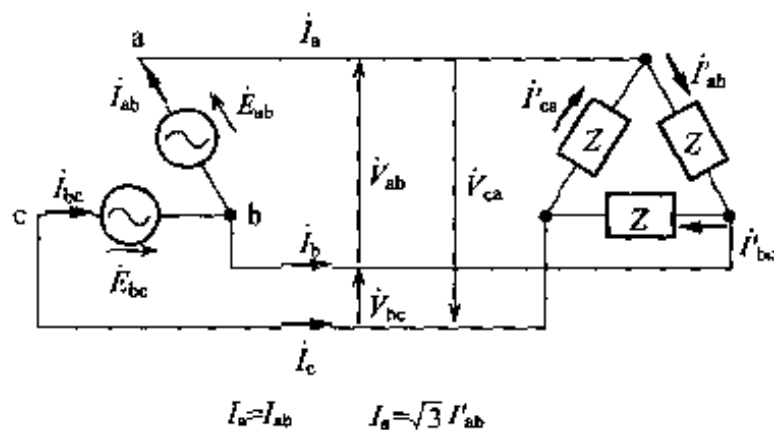


图 4.16 V 形连接

从图 4.17 可知,线电压 $\dot{V}_{ab}$ 、 $\dot{V}_{bc}$ 、 $\dot{V}_{ca}$ 与相电压 $\dot{E}_{ab}$ 、 $\dot{E}_{bc}$ 、 $\dot{E}_{ca}$ 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_{ab} &= \dot{E}_{ab} [\text{V}] \\ \dot{V}_{bc} &= \dot{E}_{bc} [\text{V}] \\ \dot{V}_{ca} &= -(\dot{E}_{ab} + \dot{E}_{bc}) [\text{V}] \end{aligned} \right\} \quad (4.11)$$

即使 c-a 间没有电源,但线电压 $\dot{V}_{ca}$ 仍然存在,并且三个线电压也是平衡三相电压,因此它能够提供三相交流电。

设线电流为 $\dot{I}_a$ 、 $\dot{I}_b$ 、 $\dot{I}_c$,电源的相电流为

$\dot{I}_{ab}$ 、 $\dot{I}_{bc}$,则

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{ab} &= \dot{I}_a \\ \dot{I}_{bc} &= -\dot{I}_c \end{aligned} \right\} \quad (4.12)$$

V 形接法时,电源的相电流与线电流大

小相等,不过流过 $\triangle$ 形接法的负载中的相电

流是线电流的 $1/\sqrt{3}$ 倍。因此,如果把三台容

量为 $P(=EI)$ 的单相变压器以 $\triangle$ 形的方式连接起来,由于线电流是单相变压器额定电流(相电流)的 $\sqrt{3}$ 倍,所以可提供 $3P$ 的功率。而把两台单相变压器以 V 形连接时,最大线电流只能是变压器的额定电流,因此容量为 $2P$ 的设备所能提供的最大功率为 $\sqrt{3}P$ 。

V 形接法虽然有这样的缺点,但因其设置空间少,常常用在向小容量动力用负载供电的变压器的连接上。

● 4.2.5 错连时产生的后果

下面举例说明单相变压器的三相连接时,如果连接错误,会产生什么样的后果。图 4.18(a)是三台单相变压器的 $\triangle$ - $\triangle$ 形接法,而图(b)则把一台变压器的次级线圈接反了。

设变压器次级端的各相电压为 $\dot{E}_a$ 、 $\dot{E}_b$ 、 $\dot{E}_c$ 。图 4.18(a)的正确连接时闭合回路的电动势为

$$\dot{E}_a + \dot{E}_b + \dot{E}_c = 0$$

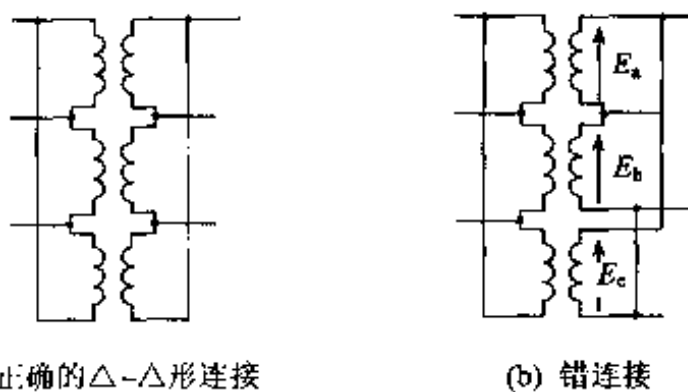


图 4.18

而在图(b)的错误连接中闭合回路的电动势为

$$\begin{aligned}\dot{E}_a + \dot{E}_b - \dot{E}_c &= E + E\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &\quad - E\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ &= (1 - j\sqrt{3})E \quad (4.13)\end{aligned}$$

图 4.19 所示是其相量图。

发生这种错误连接时,闭合回路的电动势不为 0,所产生的电压是相电压的两倍,因此相当于将电动势在三台变压器的次级线圈上短路了。

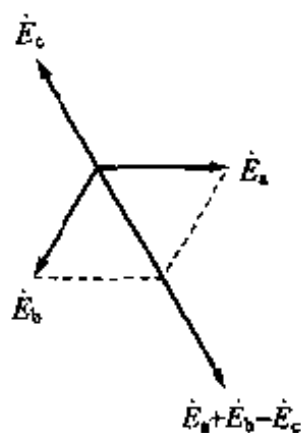


图 4.19 错连接时的相量图

4.3 对称三相电路的计算

这里讨论基本的对称三相电路的计算方法。

由于在对称三相电路中电源、负载都是对称的,因此各相的作用都相同,各相的计算方法和单相电路的计算方法相同。

● 4.3.1 电源与负载联接相同时电流的计算

1 Y-Y形电路的线电流与相电流

三相电路本来就是由三个单相电路组合在一起的,因此在计算线电流

时,可以将其分解成三个单相电路。

如图 4.20 所示,在 Y-Y 形电路可以取出一个单相,用单相电路的计算方法求出相电流。a 相的相电流 $\dot{I}_a$ 可由下式求得:

$$\dot{I}_a = \dot{E}_a / Z \quad (4.14)$$

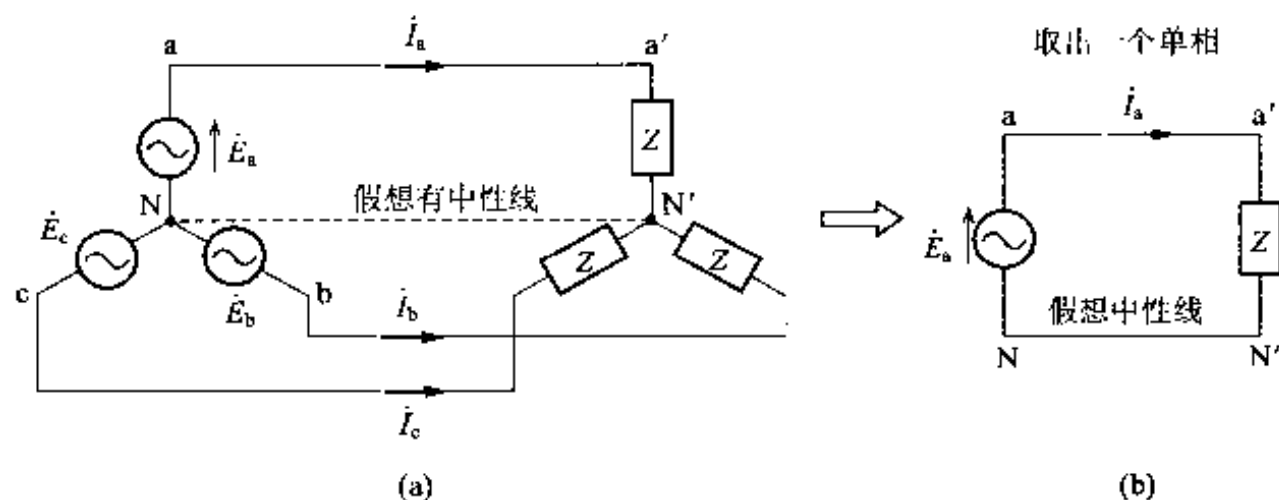


图 4.20

对称三相电路中,三相的相电流大小相等,彼此间的相位差为 $2\pi/3$,因此求出 a 相的电流后,就可计算出其他各项的相电流,它们分别为

$$\begin{aligned} \dot{I}_b &= I_a \angle (-2\pi/3) \\ \dot{I}_c &= I_a \angle (-4\pi/3) \end{aligned} \quad (4.15)$$

如果知道线电压,就可由线电压求出相电压。Y-Y 形电路中的相电压是线电压的 $1/\sqrt{3}$,相位落后 $\pi/6$ 。

【例 4.1】 在图 4.21 的平衡三相电路中,接上 $V=200\text{V}$ 的三相交流电压,求相电压与线电流($R=20\Omega$, $X_L=15\Omega$)。

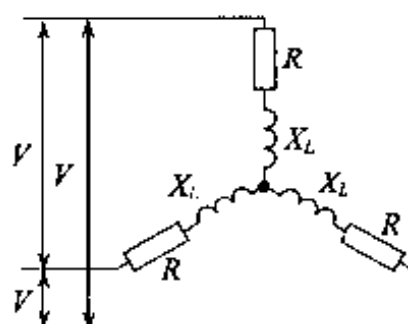


图 4.21

解 因为负载是Y形接法,所以相电压是线电压的 $1/\sqrt{3}$ 倍,即

$$\text{相电压} = 200/\sqrt{3} \approx 115\text{V}$$

各相的阻抗大小为

$$Z = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25\Omega$$

Y形接法时,线电流等于相电流,因此

$$\text{线电流} = \text{相电流} = \text{相电压}/Z = (200/\sqrt{3})/25 \approx 4.62\text{A}$$

2 Δ - Δ 电路的线电流与相电流

在 Δ 形连接的对称三相电路中,因每个负载都接在电源上,因此如图 4.22 所示,可以直接将电路分解成三个单相电路,分别从三个单相电路中计算出相电流,然后由式(4.10)就可求出线电流。

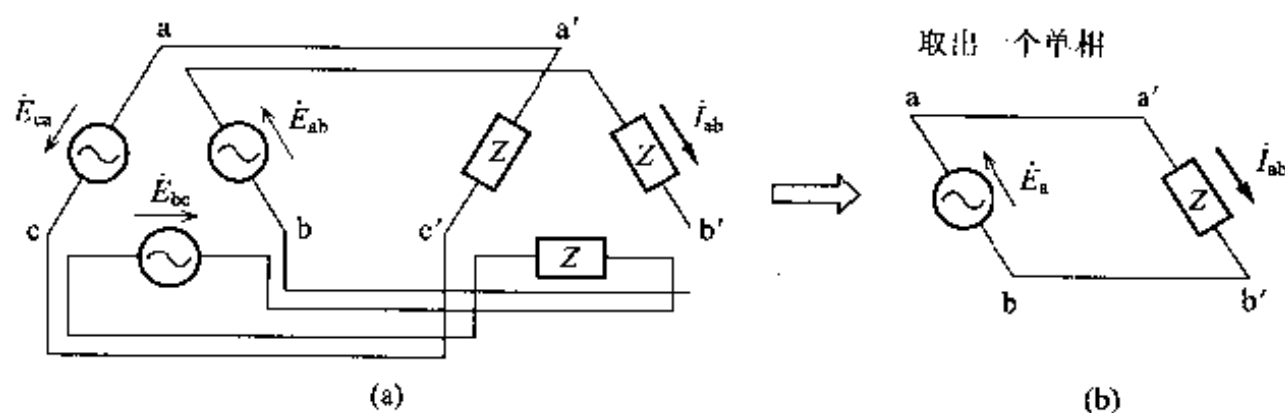


图 4.22

设各线电流为 $\dot{I}_a$ 、 $\dot{I}_b$ 、 $\dot{I}_c$, 各相电流为 $\dot{I}_{ab}$ 、 $\dot{I}_{bc}$ 、 $\dot{I}_{ca}$ 。如图 4.22(b) 所示,取出一个单相进行计算,则各相电流为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_{ab} &= \dot{V}_{ab}/Z \\ \dot{I}_{bc} &= \dot{V}_{bc}/Z \\ \dot{I}_{ca} &= \dot{V}_{ca}/Z \end{aligned} \right\} \quad (4.16)$$

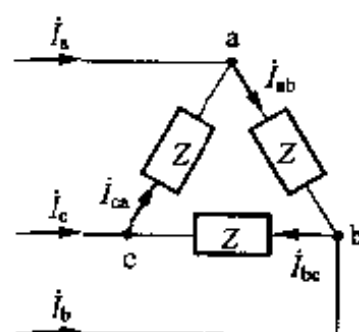


图 4.23

从图 4.23 的相电流与线电流的关系可知,线电流为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_a &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_b &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_c &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

另外,若知道相电流的大小,那么相电流的 $\sqrt{3}$ 倍就是线电流的大小。

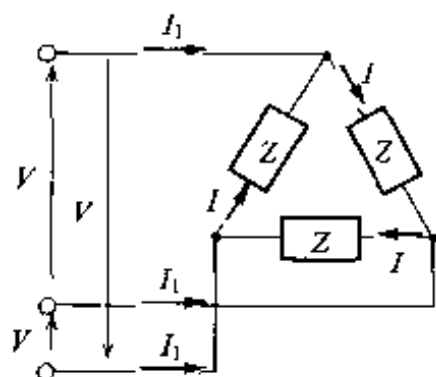


图 4.24

【例 4.2】如图 4.24 所示,负载阻抗 $Z = 40 + 30j$,为 Δ 形接法,给其接上一个大小为 200 V 的对称三相电压,求相电流 I [A]和线电流 I_1 [A]。

解 一相阻抗的大小为

$$Z = \sqrt{40^2 + 30^2} = 50 \Omega$$

Δ 形接法时,相电压等于线电压,因此

$$\text{相电流为 } I = 200/50 = 4 \text{ A}$$

$$\text{线电流为 } I_1 = \sqrt{3}I = \sqrt{3} \times 4 = 6.93 \text{ A}$$

● 4.3.2 电源与负载联接不同时电流的计算

电源与负载均为Y-Y或 Δ - Δ 形接法时,我们可以很容易地将电路分解成三个单相电路。如果电源与负载的连接方式不同,如图 4.25 所示,就不能用上述方法计算。

首先要变换Y- Δ 形接法,使电源与负载的连接方式相同,然后就可通过Y-Y或 Δ - Δ 形接法的方法进行计算了。步骤如下:

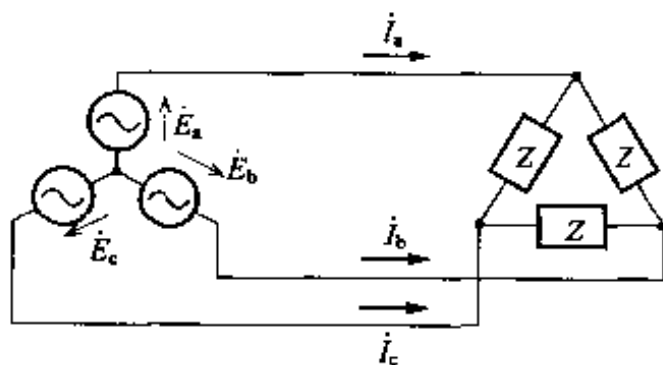


图 4.25 Y电源- Δ 形负载的电路

1 将 Δ 形接法的负载变换成Y形接法(Δ -Y变换)

为了使 Δ 形连接的负载(图 4.26(b))与Y形连接的负载(图 4.26(a))

等效,就必须使各入端阻抗相同。为使端子间的阻抗相同,下列式子必须成立:

$$\left. \begin{aligned} \text{端子 a-b 间 } Z_a + Z_b &= \frac{Z_{ab}(Z_{bc} + Z_{ca})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \dots\dots ① \\ \text{b-c 间 } Z_b + Z_c &= \frac{Z_{bc}(Z_{ab} + Z_{ca})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \dots\dots ② \\ \text{c-a 间 } Z_c + Z_a &= \frac{Z_{ca}(Z_{bc} + Z_{ab})}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \dots\dots ③ \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

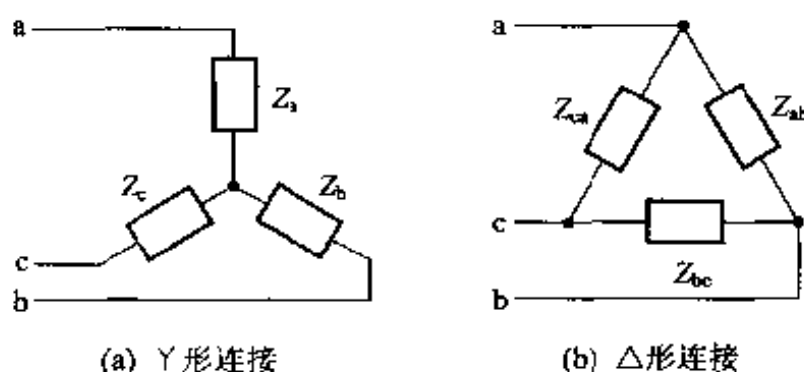


图 4.26

由(①+③-②)/2,可得

$$\left. \begin{aligned} Z_a &= \frac{Z_{ab}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \\ Z_b &= \frac{Z_{ab}Z_{bc}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \quad Z_c = \frac{Z_{bc}Z_{ca}}{Z_{ab} + Z_{bc} + Z_{ca}} \end{aligned} \right\} \quad (4.19)$$

利用上述公式,就可以将Δ形接法的负载变换成与它等效的Y形接法的负载。

若负载是三相平衡负载,则

Δ形接法的负载 $Z_{ab} = Z_{bc} = Z_{ca} = Z_{\Delta}$

Y形接法的负载 $Z_a = Z_b = Z_c = Z_Y$

将以上的式子代入式(4.19),可得

$$Z_Y = \frac{Z_{\Delta}}{3} \quad (4.20)$$

下面,将Y形连接的负载变换为Δ形连接的负载。

由式(4.18)可知

$$\left. \begin{aligned} Z_{ab} &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_c} \\ Z_{bc} &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_a} \\ Z_{ca} &= \frac{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a}{Z_b} \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

若为三相平衡负载,则

$$Z_{\Delta} = 3 Z_Y \quad (4.22)$$

掌握了 $\triangle$ 形接法的负载变换为 Y 形接法的负载的方法后,我们来进行下面的计算。

2 Y 电源- $\triangle$ 形负载电路的计算

计算图 4.25 所示的电源为 Y 形接法而负载为 $\triangle$ 形接法的电路中的线电流。

首先如图 4.27 所示,将 $\triangle$ 形负载变换成 Y 形负载,即变为 Y 形电源与 Y 形负载的形式,然后取出一个单相进行计算(图 4.28(a,b))。 $\triangle$ 形接法的阻抗 Z ,变换为 Y 形连接时大小变为 $Z/3$,因此一个相的电流 $\dot{I}_a$ (线电流)为

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{E}_a}{(Z/3)} \quad (4.23)$$

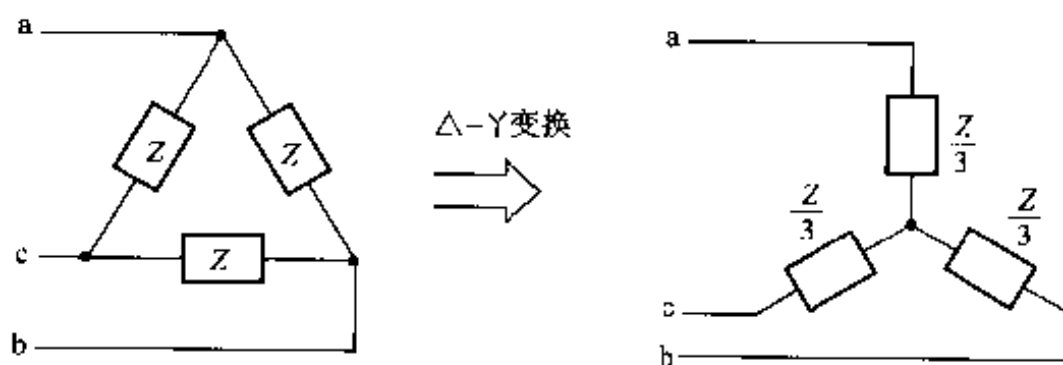


图 4.27

其实,把 $\triangle$ 形负载变换为 Y 形负载不是计算线电流的唯一方法。如果从 Y 形电源的相电压求出线电压,就可计算出 $\triangle$ 形负载的相电流,再由相电流与线电流的关系也可求出线电流。

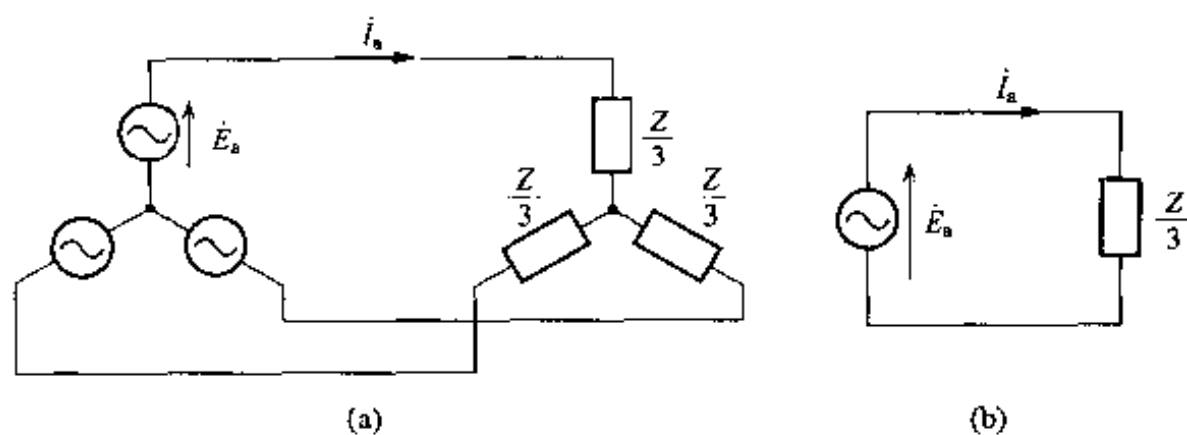


图 4.28

【例 4.3】 图 4.29 的电路中,电阻 $R=15\Omega$,电抗 $X=60\Omega$,三相电压为 200V ,求线电流 $I[\text{A}]$ 。

解 将 Δ 形电抗进行 Δ -Y变换后,得

$$X_Y = 20\Omega$$

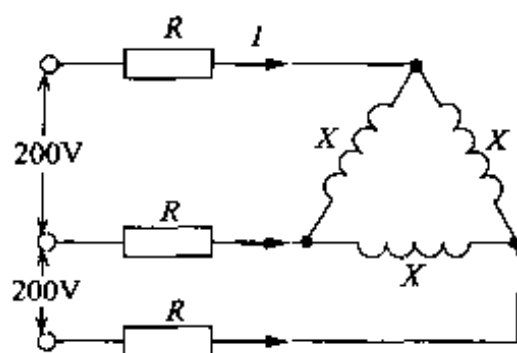


图 4.29

Δ -Y变换成Y-Y电路,取出一个单相后,如图 4.30 所示,则

Y形接法的相电压 $E = 200/\sqrt{3} \approx 115\text{V}$

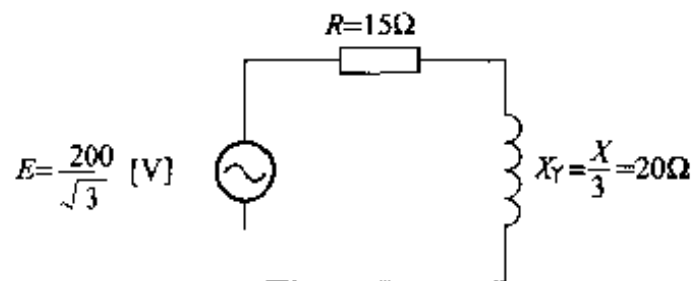


图 4.30

一个单相的阻抗 $Z=15+j20, Z=\sqrt{15^2+20^2}=25\Omega$

因此,所求的电流为

$$I=E/Z=200/25\sqrt{3}\approx 4.62\text{A}$$

另外,流过 Δ 形电抗 X 的相电流,也可由 Δ 形接法的相电流与线电流的关系求出,即

$$I/\sqrt{3}\approx 2.67\text{A}$$

4.4 三相电路的功率

4.4.1 三相电路功率的计算

三相电路是三个单相电路的组合,所以电路中消耗的功率就等于各个单相功率之和。把三相电路的总功率称为三相功率。

设对称电动势的瞬时值为 e_a, e_b, e_c , 线电流的瞬时值为 i_a, i_b, i_c 。三相功率的瞬时值等于各个单相功率之和,即

$$p=p_a+p_b+p_c=e_a i_a+e_b i_b+e_c i_c \quad (4.24)$$

设负载的功率因数角为 ϕ , 则各相电压与电流的瞬时值可表示为

$$\left. \begin{aligned} e_a &= E_m \sin \omega t & i_a &= I_m \sin(\omega t - \phi) \\ e_b &= E_m \sin(\omega t - 2\pi/3) & i_b &= I_m \sin(\omega t - 2\pi/3 - \phi) \\ e_c &= E_m \sin(\omega t - 4\pi/3) & i_c &= I_m \sin(\omega t - 4\pi/3 - \phi) \end{aligned} \right\} \quad (4.25)$$

E_m 为电压的最大值, I_m 为电流的最大值, ϕ 为负载的功率因数角(若负载 $Z=R+jX$, 则 $\phi=\tan^{-1}(X/R)$)。

因此,各相功率的瞬时值为

$$\left. \begin{aligned} p_a &= e_a i_a = E_m I_m \sin \omega t \cdot \sin(\omega t - \phi) = EI \{ \cos \theta - \cos(2\omega t - \phi) \} \\ p_b &= e_b i_b = EI \{ \cos \theta - \cos(2\omega t - 2\pi/3 - \phi) \} \\ p_c &= e_c i_c = EI \{ \cos \theta - \cos(2\omega t - 4\pi/3 - \phi) \} \end{aligned} \right\} \quad (4.26)$$

式中 E 为相电压的有效值, I 为相电流的有效值。

各相的瞬时值之和为

$$p=p_a+p_b+p_c=3EI\cos\phi \text{ [W]} \quad (4.27)$$

可见,平衡三相电路的瞬时功率恒定,它不随时间发生变化,大小等于

一个单相的消耗功率的 3 倍。

从式(4.26)、式(4.27)可以看出,单相电路的功率是脉动的,而平衡三相电路的瞬时功率之和不是脉动的,它为定值。

用线电压表示电压,则式(4.27)可变为

$$P=3EI\cos\phi=\sqrt{3}VI\cos\phi \quad [\text{W}] \quad (4.28)$$

三相功率是由线电压 V 和线电流 I 表示的,因此它适合于任何形式联接的电路。

Y形接法时,线电压为 $\sqrt{3}$ 相电压,线电流等于相电流; Δ 形接法时,线电压等于相电压,线电流等于 $\sqrt{3}$ 相电流。所以,不论是Y形或 Δ 形接法,三相功率的表达式都为式(4.28)。

需要注意的是, ϕ 不是线电压 $\dot{V}$ 与线电流 $\dot{i}$ 之间的相位差,它是单相负载的功率因数角,也就是说,它是相电压 $\dot{E}$ 与相电流 $\dot{i}$ 之间的相位差。

另外,三相无功功率为

$$Q=\sqrt{3}VI\sin\phi \quad [\text{var}] \quad (4.29)$$

视在功率为

$$S=\sqrt{3}VI \quad [\text{VA}] \quad (4.30)$$

【例 4.4】 对称三相电源供给负载 2kW 的三相功率,若线电压为 200V,负载的功率因数为 80%,求线电流的大小。

解 设线电流为 I ,从式(4.28)可得

$$I=\frac{P}{\sqrt{3}VI\cos\phi}=\frac{2\times 10^3}{\sqrt{3}\times 200\times 0.8}=7.22\text{A}$$

● 4.4.2 三相电路功率的测量

通过测量各个单相的功率,再将其相加,就可求出三相功率。用这种方法测量,则需要三个单相功率计。其实,用两个单相功率计也可测得三相功率,这种方法叫做双瓦特计法。根据此原理用来测量三相功率的仪器称为三相功率计。

现将两个单相功率计 W_1 、 W_2 接入电路,如图 4.31(a)所示,则流入功率计 W_1 电流线圈中的电流为 $\dot{I}_a$ (线电流),加在电压线圈上的线电压为 V_{ab} 。流过 W_2 功率计的电流线圈中的电流为线电流 $\dot{I}_c$,加在电压线圈上的

电压为线电压 $\dot{V}_{cb} = -\dot{V}_{bc}$ 。

设三相负载的功率因数为 $\cos\phi$ (落后), 则电压、电流的相量图为图 4.31(b) 所示。相量图中, $\dot{V}_{ab}$ 与 $\dot{I}_a$ 的相位差为 $(\pi/6 + \phi)$, $\dot{V}_{cb}$ 与 $\dot{I}_c$ 的相位差为 $(\pi/6 - \phi)$, 因此功率计 W_1 、 W_2 的读数分别为

$$W_1 = V_{ab} I_a \cos(\pi/6 + \phi) \quad (4.31)$$

$$W_2 = V_{cb} I_c \cos(\pi/6 - \phi) \quad (4.32)$$

于是可得出

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= VI \cos(\pi/6 + \phi) + VI \cos(\pi/6 - \phi) \\ &= VI \times 2 \cos\phi \cos\pi/6 = VI \times 2 \times (\sqrt{3}/2) \cos\phi \\ &= \sqrt{3} VI \cos\phi \quad (\text{三相功率的表述式}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

三相功率就是这两个功率计上的读数之和。

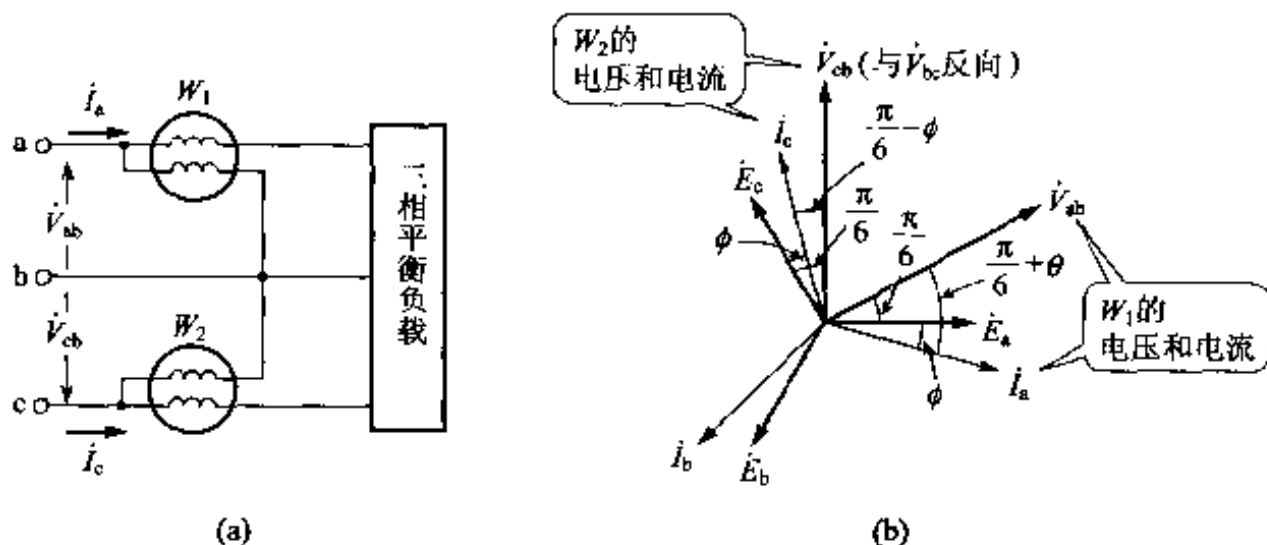


图 4.31

必须要注意的是,当功率因数角小于 $\pi/3$ 时,可以直接读取功率计,而当功率因数角大于 $\pi/3$ 时, W_1 为负值,无法读出数据。这种情况下,需要将偏转为负值的功率计的电压线圈反向连接,然后将读出的数值前加上负号,最后将其相加,就可求出三相功率。

因为用二瓦特计法可测出三相功率,于是把两个功率计作为一个整体就是一个三相功率计。二瓦特计法不仅可以测量平衡三相电路,也可测量不平衡三相电路的功率。

另外,由式(4.31)、式(4.32)可得

$$W_2 - W_1 = VI \sin \phi$$

因此,无功功率为

$$Q = \sqrt{3}(W_2 - W_1) = \sqrt{3}VI \sin \phi \quad (4.34)$$

【例 4.5】 在图 4.31(a)所示的电路中,接入两个功率计,功率计上的读数分别为 $W_1 = 5.84\text{kW}$, $W_2 = 2.68\text{kW}$,若线电压为 200V ,线电流为 30A ,求负载的功率因数。

解 设负载的功率因数为 $\cos \phi$ 。三相电路的功率是两个功率计的读数之和,因此

$$P = \sqrt{3}VI \cos \phi = W_1 + W_2$$

故

$$\cos \phi = \frac{W_1 + W_2}{\sqrt{3}VI} = \frac{(5.84 + 2.68) \times 10^3}{\sqrt{3} \times 200 \times 30} = 0.820$$

4.5 不对称三相电路的计算

以上我们讨论了电源、负载均为对称的三相电路。而实际上,电力系统中有很多情况下,负载是不平衡的。下面讨论当负载为不平衡时即三个不同阻抗的电路的计算。

当负载为平衡负载时,只要对其中一个单相进行计算,其他的两相只要考虑相位就可以了。而当负载不平衡时,则不能取出一个单相电路进行计算,这就要用到基尔霍夫定律。

● 4.5.1 不对称 Y-Y 电路的计算

在图 4.32 所示的电路中,给 Y 形接法的对称三相电源接入 Y 形接法的不平衡三相负载,求接入后电路中的线电流 $\dot{I}_a$ 、 $\dot{I}_b$ 、 $\dot{I}_c$ 。

设各线电压为 $\dot{V}_{ab}$ 、 $\dot{V}_{bc}$ 、 $\dot{V}_{ca}$ 。因电源是对称三相电源,故

$$\dot{V}_{ab} + \dot{V}_{bc} + \dot{V}_{ca} = 0 \quad (4.35)$$

对 N' 点应用基尔霍夫定律,则有

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0 \quad (4.36)$$

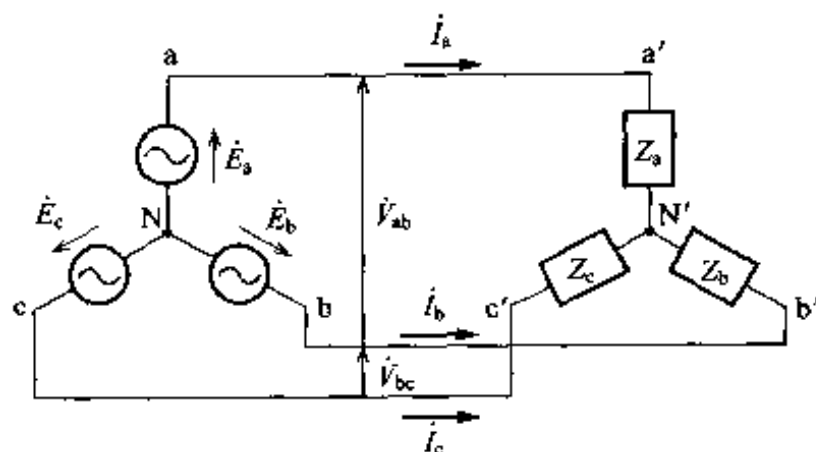


图 4.32

对闭合回路 $aa'N'b'bNa$ 及 $bb'N'c'cNb$ 应用基尔霍夫定律, 则

$$\dot{V}_{ab} = Z_a \dot{I}_a - Z_b \dot{I}_b \quad (4.37)$$

$$\dot{V}_{bc} = Z_b \dot{I}_b - Z_c \dot{I}_c \quad (4.38)$$

联立式(4.36)、式(4.37)和式(4.38)求解, 则可求出 $\dot{I}_a$ 。 $\dot{I}_b$ 、 $\dot{I}_c$ 的计算与此相同。

$$\dot{I}_a = \frac{Z_c \dot{V}_{ab} + Z_b (\dot{V}_{ab} + \dot{V}_{bc})}{Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a} [\text{A}]$$

另外, 也可通过下列方法求出电流。

设以图 4.32 中 N 为基准点的 N' 的电位为 $\dot{V}_n$, 则各线电流为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_a &= (\dot{E}_a - \dot{V}_n) / Z_a \\ \dot{I}_b &= (\dot{E}_b - \dot{V}_n) / Z_b \\ \dot{I}_c &= (\dot{E}_c - \dot{V}_n) / Z_c \end{aligned} \right\} \quad (4.39)$$

由式(4.36)和式(4.39)可求出

$$\dot{V}_n = \frac{(\dot{E}_a / Z_a) + (\dot{E}_b / Z_b) + (\dot{E}_c / Z_c)}{(1/Z_a) + (1/Z_b) + (1/Z_c)} \quad (4.40)$$

又由式(4.39)与式(4.30)可求出 $\dot{I}_a$ 、 $\dot{I}_b$ 、 $\dot{I}_c$ 的值。

如果用导纳 Y_a 、 Y_b 、 Y_c 来代替负载 Z_a 、 Z_b 和 Z_c , 则

$$\dot{V}_n = \frac{Y_a \dot{E}_a + Y_b \dot{E}_b + Y_c \dot{E}_c}{Y_a + Y_b + Y_c} [\text{V}] \quad (4.41)$$

● 4.5.2 不对称 $\triangle$ - $\triangle$ 电路的计算

如图 4.33 所示,当负载为 $\triangle$ 形不平衡三相负载时,因加在负载上的电压是对称线电压的值,所以各相电流的计算与平衡三相负载的计算方法相同。

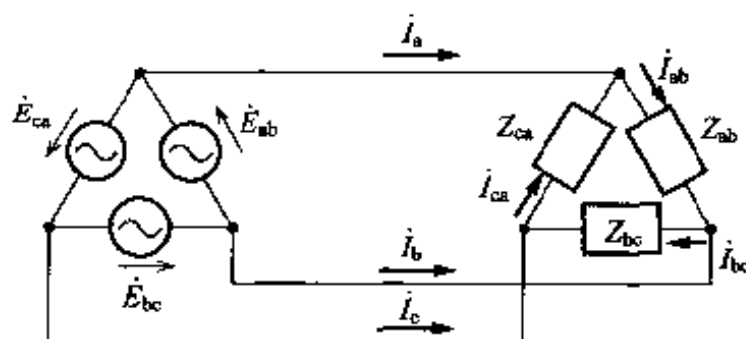


图 4.33

$$\dot{I}_{ab} = \dot{E}_{ab} / Z_{ab} \quad \dot{I}_{bc} = \dot{E}_{bc} / Z_{bc} \quad \dot{I}_{ca} = \dot{E}_{ca} / Z_{ca} \quad (4.42)$$

由线电流与相电流的关系可知,线电流为

$$\dot{I}_a = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \quad \dot{I}_b = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} \quad \dot{I}_c = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \quad (4.43)$$

当输电线发生故障时,常常使用对称分量法计算电流与电压(后述)。

4.6 三相电动机(旋转磁场的产生)

我们已在第 3 章介绍了有关利用旋转磁场来制造交流发电机的知识。在工业上,一般使用三相同步电动机或三相感应电动机。

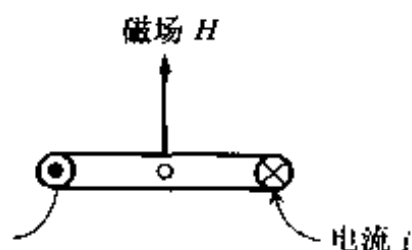


图 4.34 绕组的中心磁场

如图 4.34 所示,给一个圆形绕组通上电流时就会在垂直于绕组平面的方向上产生磁场。设通以电流 $I (I = I_m \sin \omega t)$ 时,绕组中产生的磁场强度为 H 。因为绕组中心磁场的强度 H 与电流成正比,因此

$$H = k I_m \sin \omega t = H_m \sin \omega t \quad (4.44)$$

此磁场为大小和方向都随时间变化的交变磁场。

如图 4.35(a)所示,把三个匝数相同的绕组,在空间以相互间互差 $2\pi/3$

放置,当给其通以三相交流电时,各绕组中心的磁场强度为

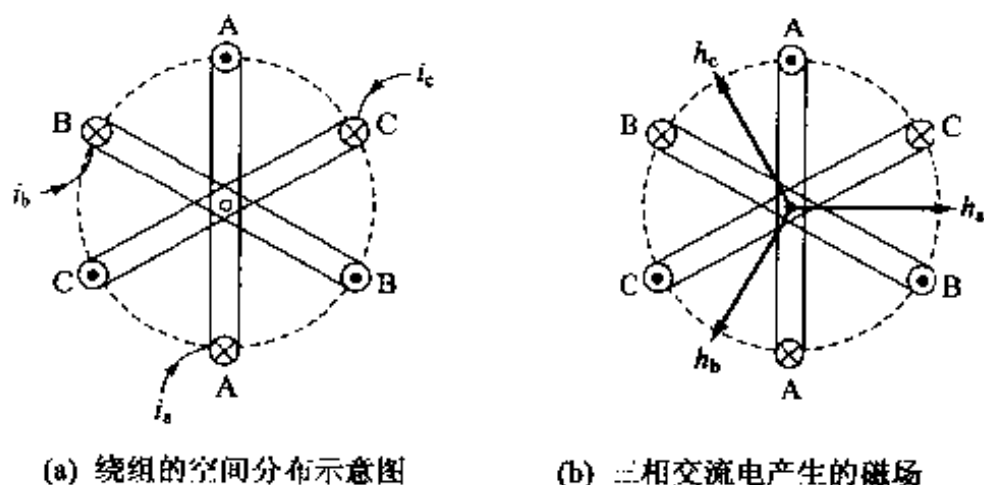


图 4.35

$$\left. \begin{aligned} h_a &= H_m \sin \omega t \\ h_b &= H_m \sin \left(\omega t - \frac{2}{3} \pi \right) \\ h_c &= H_m \sin \left(\omega t - \frac{4}{3} \pi \right) \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

空间磁场是各绕组产生的磁场 h_a 、 h_b 、 h_c 之和[图 4.35(b)]。

h_a 、 h_b 、 h_c 的大小与流过绕组的电流的大小成正比。下面从图 4.36 三相电流的波形图来讨论合成磁场的变化。

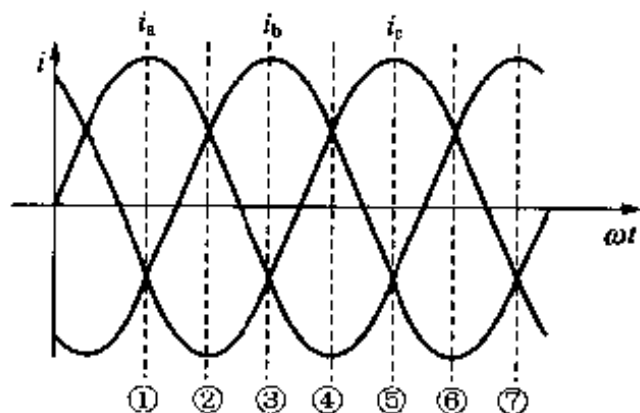


图 4.36 三相交流电流

在①这一瞬间,各相的电流为 $i_a = I_m$ [A], $i_b = i_c = -I_m/2$ [A], 合成磁场的相量方向如图 4.37 所示。合成时,若考虑电流的正负,那么从①~⑦一个周期内各时刻的合成磁场的相量就是一个周期内旋转了 360° 的磁场。

合成磁场就是这样以一定的大小 $H (= 3H_m/2)$, 以交流电流的角频率 $\omega (= 2\pi f)$ 顺时针旋转的相量。这种磁

场称为旋转磁场。它的旋转方向与相序一致(已述)。给这个磁场中放入磁铁后,受磁场的作用,磁铁也会旋转,这就是同步电动机原理。另外,在磁场中放入鼠笼形导体时,受旋转磁场的影响,鼠笼形导体中会产生感应电动

势。电动势又使导体产生感应电流。在感应电流与磁场间电磁力的作用下,鼠笼形导体发生旋转。这就是三相感应电动机的原理。

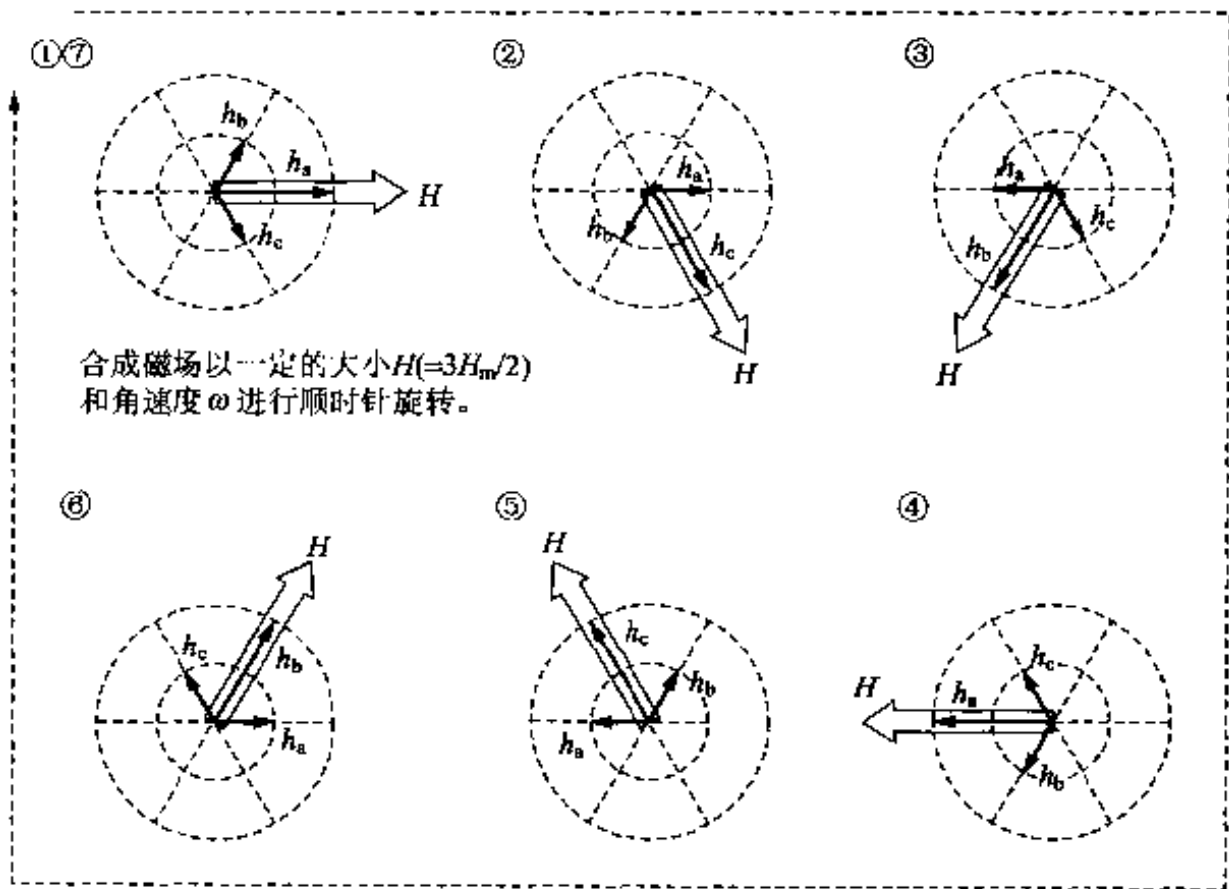


图 4.37 旋转磁场

旋转磁场的方向由电源的相序来决定。当改变相序时,旋转磁场的方向会跟着改变,而电动机的转子也会以反向旋转。

在图 4.38 中,把接在电动机上的两根导线调换位置,则旋转磁场的方向就会与原来相反(UVW→UWV),电动机的旋转方向也与原来相反。

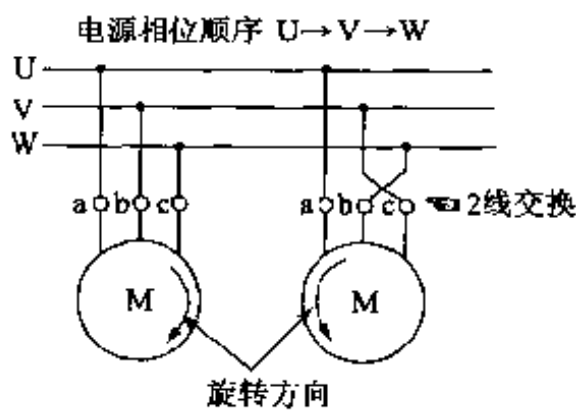


图 4.38 改变电流相序时的旋转方向

4.7 对称分量法的基础

在输电线三相平衡电路中,当负载不平衡或由于输电线发生故障而产生不平衡电流时,为了让保护继电器排除故障,就有必要计算出电压和电流的大小,为了把不平衡三相电路中复杂的计算简单化,于是便想出了对称分量法。

对称分量法中,认为电流、电压等都是由对称的成分构成的,把不平衡电压、电流分成三组平衡成分,然后分别对各成分进行电路计算,这就是利用叠加定理(5章讲述)求实际的电压与电流的方法。

本书中仅阐述对称分量法的概念,有关详细知识请参阅送配电的专业书籍。

1 对称分量

任何一个不平衡电流,都可分解成下面的三组平衡分量。

- ① 同相分量(零相序分量 $\dot{I}_0$)。
- ② 三相平衡分量(正相序分量 $\dot{I}_1$)。
- ③ 三相平衡,但相序相反的分量(反相序分量 $\dot{I}_2$)

图 4.39 是各分量的相量图。这些都称为对称分量。零相序分量是单相交流电,正相序分量和反相序分量是对称三相交流电。当三相处于平衡状态(正常状态)时,零相序分量、反相序分量都为 0。

同理,电压也可分解成零相序分量、正相序分量和反相序分量。

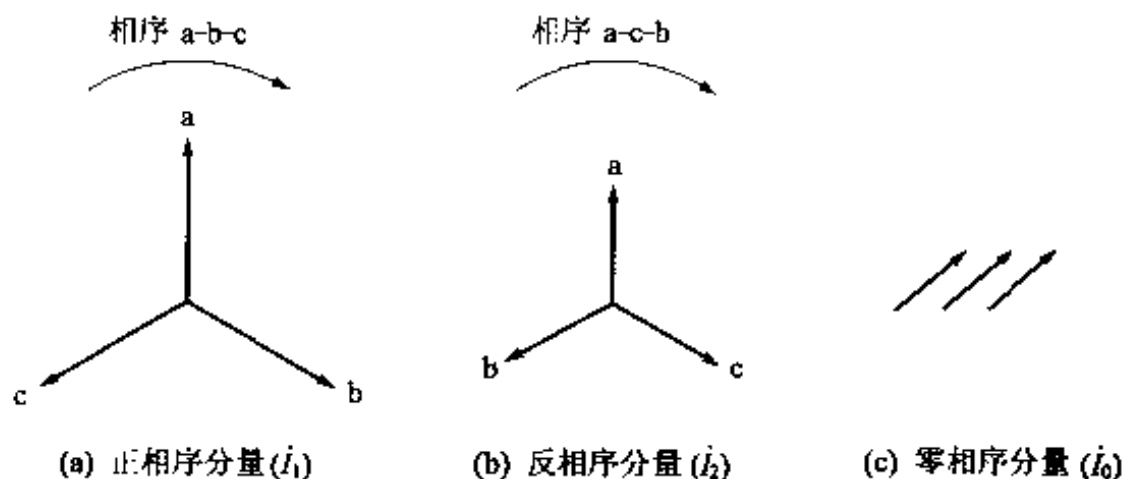


图 4.39 对称分量

2 不平衡电流的三组相序分量表示法

对称分量法中,使用“ a ”算子,由下式表示:

$$a = \left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 \angle \frac{2}{3}\pi \quad (4.46)$$

我们已经学过给交流电路乘以 j 后,其大小不变,但相位会超前 $\pi/2$ 。同理,给某相量乘以 a 后,其绝对值大小不变,但相位将超前 $2\pi/3$;乘以 a^2 后,相位超前 $4\pi/3$ (或落后 $2\pi/3$);乘以 a^3 ,则相位超前 2π ,所以 a^3 等于 1。

用 a 来表示相序为 abc 的对称三相电动势,则

$$\dot{E}_a (\text{参考量}) \quad \dot{E}_b = a^2 \dot{E}_a \quad \dot{E}_c = a \dot{E}_a \quad (4.47)$$

三者之间的关系如图 4.40 所示。另外,也可从图中看出

$$1 + a + a^2 = 0$$

用 a 把三相不平衡电流表示成各自的对称分量,则为

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_a &= \dot{I}_0 + \dot{I}_1 + \dot{I}_2 \\ \dot{I}_b &= \dot{I}_0 + a^2 \dot{I}_1 + a \dot{I}_2 \\ \dot{I}_c &= \dot{I}_0 + a \dot{I}_1 + a^2 \dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (4.48)$$

与此相反,从式(4.48)可求出电流的对称分量 $\dot{I}_0$ 、 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$,即

$$\left. \begin{aligned} \dot{I}_0 &= (\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c)/3 \\ \dot{I}_1 &= (\dot{I}_a + a \dot{I}_b + a^2 \dot{I}_c)/3 \\ \dot{I}_2 &= (\dot{I}_a + a^2 \dot{I}_b + a \dot{I}_c)/3 \end{aligned} \right\} \quad (4.49)$$

同理可求出电压的对称分量。

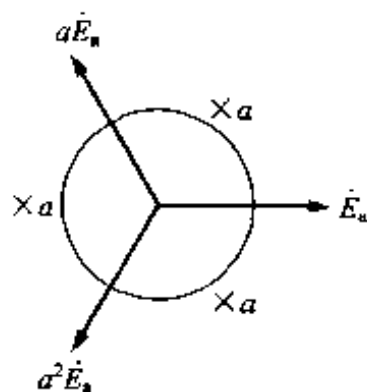


图 4.40 用 a 表示的对称三相电动势

3 对称分量电流的性质

零相序分量、正相序分量和反相序分量这三组经平衡后的电流所代表的意义如下所述:

(1) **零相序分量($\dot{I}_0$)**。三相电路在发生接地故障或断线时,就会产生不平衡电流。当输电线中流过零相序电流 $\dot{I}_0$ 时, $\dot{I}_0$ 产生的磁通各相相同,

因此总磁通等于各磁通的算术和。由于互感作用,附近的通信线中会产生感应电压,从而发生通信故障。此时,只要检测出 $\dot{I}_0$,就可使接地继电器工作,从而排除接地事故。

(2) 正相序分量($\dot{I}_1$)。三相平衡电路中流过的电流才是正相序电流。

(3) 反相序分量($\dot{I}_2$)。这是三相平衡电流,但相的旋转方向与正相序电流的相反。因此,反相序分量 $\dot{I}_2$ 给电动机提供了反向力矩(制动作用)。

$\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$ 为正常三相交流电时,零相序分量 $\dot{I}_0$ 和反相序分量 $\dot{I}_2$ 都为0,只有当发生故障,产生不平衡时才会产生 $\dot{I}_0$ 和 $\dot{I}_2$ 。

通信线路的感应故障

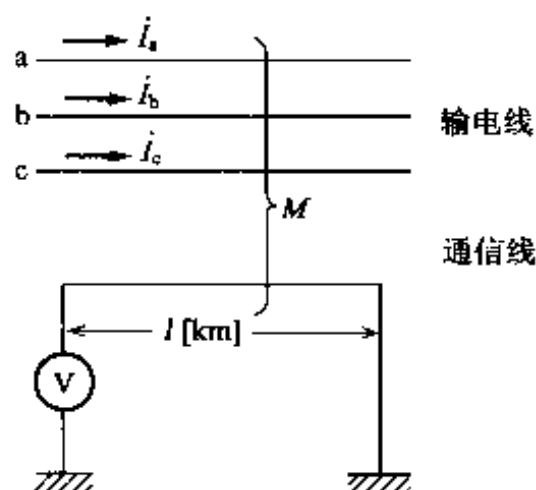


图 4.a 通信线上的感应故障

下面求输电线的一根线接地时,因电磁感应而产生在通信线上的电压。

如图 4-a 所示,设输电线中流过的各相电流为 $\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$ 。单位长度的输电线与通信线的各相的互感为 $M[\text{H/km}]$,输电线和通信线并行的长度为 $l[\text{km}]$,则感应电压

$$\dot{V} = j\omega Ml(\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c) = j\omega Ml \times 3 \dot{I}_0$$

一般情况下,因 $\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c$ 平衡,所以零相序分量为 $\dot{I}_0=0$,不产生感应电压。但是,当输电线中的一根线发生接地故障时,就会产生零相序分量 $\dot{I}_0$,从而引起感应故障。

对称分量电流 $\dot{I}_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ 的计算

如图 4-b 所示,给对称三相电源中接入一个单相负载,求对称分量电流 $\dot{I}_0, \dot{I}_1, \dot{I}_2$ 。

由基尔霍夫定律可知

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b = 0$$

所以

$$\dot{I}_b = -\dot{I}_a$$

因 c 线开路,故 $\dot{I}_c=0$ 。将此代入式(4.49),可得

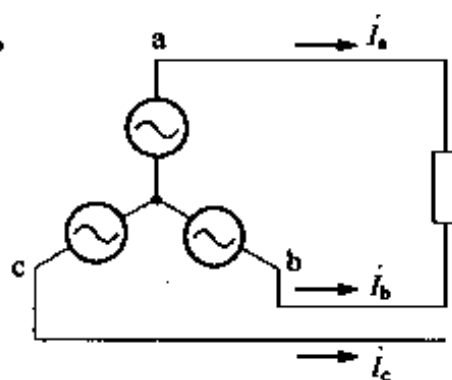


图 4.b

$$\dot{I}_0 = (\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c)/3 = 0$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_1 &= (\dot{I}_a + a\dot{I}_b + a^2\dot{I}_c)/3 = \{\dot{I}_a + a(-\dot{I}_a)\}/3 \\ &= (1-a)\dot{I}_a/3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{I}_2 &= (\dot{I}_a + a^2\dot{I}_b + a\dot{I}_c)/3 = \{\dot{I}_a - a^2(-\dot{I}_a)\}/3 \\ &= (1-a^2)\dot{I}_a/3\end{aligned}$$

4 发电机的端电压

一般情况下,三相发电机只产生正相序电动势 E_1 。当负载不平衡时,对应于对称分量电流 ($\dot{I}_0$ 、 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$),发电机的内阻就会有三个不同的值 Z_0 、 Z_1 、 Z_2 。因此,电源的端电压便成了不平衡电压。

发电机的端电压的对称分量计算如下:

$$\left. \begin{aligned}\dot{V}_0 &= -\dot{I}_0 Z_0 \\ \dot{V}_1 &= \dot{E}_1 - \dot{I}_1 Z_1 \\ \dot{V}_2 &= -\dot{I}_2 Z_2\end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

这是发电机的基本式。

5 检测接地故障的方法(零相序变流器(ZCT))

下面以零相序变流器(ZCT)为例,介绍检测接地故障的装置。

如图 4.41 所示,零相序变流器的结构是:给一个铁心中贯通三个导体作为一次端,并且上面绕上二次绕组。由一次电流的各线电流产生的磁通在铁心中进行合成,在二次绕组中由合成磁通产生二次电流。一般情况下,一次电流是三相平衡电流,故 $\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 0$,磁场上达到平衡,不产生二次电流,但当其发生接地故障时,会产生零相序电流。此时,一次电流为

$$\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c = 3\dot{I}_0$$

因此,铁心中有二次电流通过,产生了

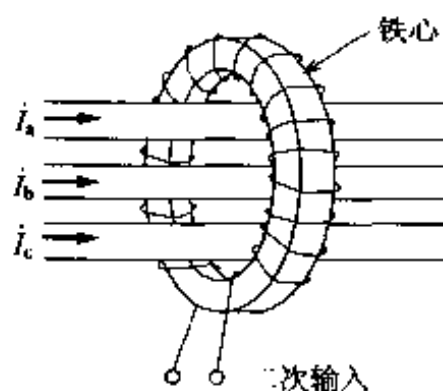


图 4.41 零相序变流器的结构图

磁通, 这样就可检测出接地故障。因此, 零相序变流器常被用作接地继电器 CT 的检测输入。

►► 练习题

习题 1

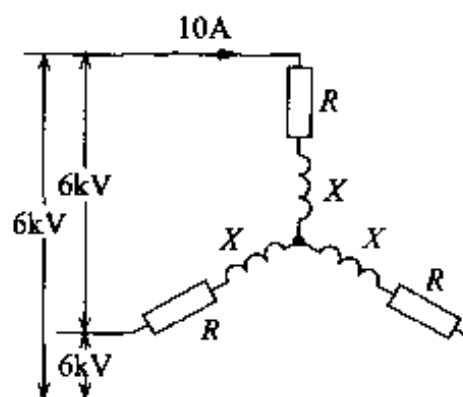


图 4.42

图 4.42 中的平衡三相负载为 60 kW, 求电抗 $X[\Omega]$ 。

习题 2

写出图 4.43 的平衡三相电路中线电流的表达式。 C_1 、 C_2 为静电容量, 设 $\dot{E}_a$ 、 $\dot{E}_b$ 、 $\dot{E}_c$ 是大小为 E 、角频率为 ω 的对称三相电压。

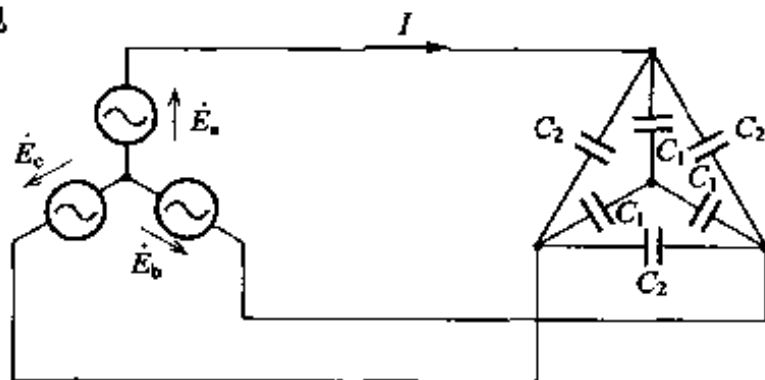


图 4.43

习题 3

如图 4.44 所示, 给 Δ 形接法的负载加上 Y 形接法的对称三相电源, 求:

- (1) 相电流的大小 I_{ph} 。
- (2) 线电流的大小 I_L 。
- (3) 负载消耗的全部功率。
- (4) $\dot{V}_{ab}$ 与 $\dot{I}_a$ 的相位差。

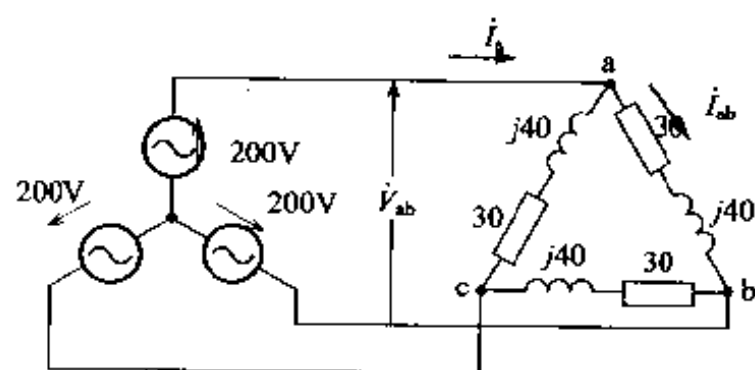


图 4.44

第 5 章 电路定理

本章首先介绍有关电压源和电流源的概念,然后论述叠加定理、等效电压源定理(戴维宁定理)、等效电流源定理(诺顿定理)及补偿定理等电路的基本定理。

叠加定理的内容是:对含有多个电压源、电流源的电路,先计算在各个电源的独立作用下某支路上的电流和各元件上电压,然后将此相加,就可得到复杂电路在所有电源共同作用下的支路电流和各元件上的电压。当给已有的电路接入一个新元件时,使用等效电压源定理(戴维宁定理)和等效电流源定理(诺顿定理),能够使电路的计算得到简化。由于生活中我们常常碰到这样的问题,所以等效电压源定理和等效电流源定理是具有实用性的重要定理。

补偿定理是当电网络中元件的参数发生变化时,能够简单地计算网络中电压与电流变动量的定理。也就是说,此定理能够对电路的变化进行分析和预测计算。

在本章的最后,学习最大功率传输定理,此定理主要用于计算通讯工程和小电力机器等获得的最大传输功率。

5.1 电压源和电流源

● 5.1.1 电压源

对于电压源,首先分析一下我们身边最常见的、不能充电的一次性电池。一般认为,电池的端电压是个定值,约为 1.5V 。实际上,当电池(比如 5 号电池)中流过 20mA 的小电流时,如图 5.1(a)所示,其端电压 V 基本上不随通过它的电流的改变而变化,可以看作电压恒定。但是,当电流增大到

100~300mA 时,端电压 V 会随电流的增大而减小。如图 5.1(b)所示,电流 I 与电压 V 间的关系接近于下列的线性一次方程:

$$V = V_i - R_i \cdot I \quad (5.1)$$

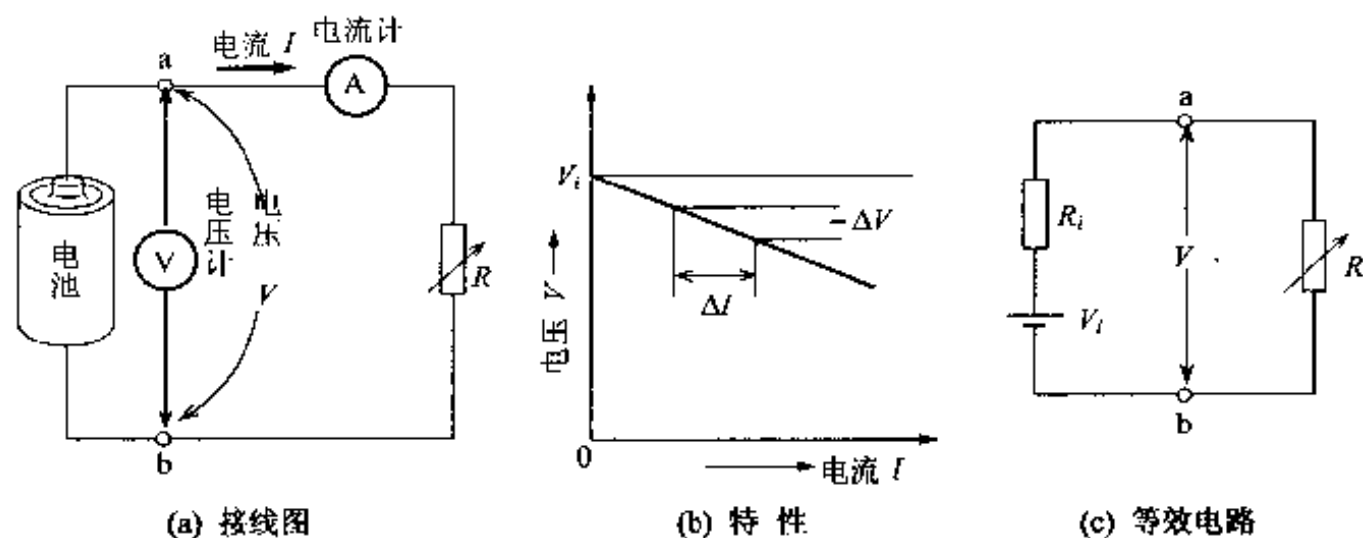


图 5.1 一次性电池的 $V-I$ 特性图

电压源可用图 5.1(c)的等效电路来代替。这种等效电路就称为等效电压源电路。 V_i 是电池的开路电压,它不随电流的大小发生变化。 R_i 是电池的内阻,等于图 5.1(b)中粗线的斜率,即内阻大小为

$$R_i = \Delta V / \Delta I$$

把这种电压值不随电流值大小变化的理想电源叫做电压源,记作 V_i (图 5.1(c))。也就是说,理想电压源的内阻为 0,电压恒定,它与负载电阻的大小无关。(电池在一般的使用状态下, R_i 很小,因此可以视为理想电压源。)

● 5.1.2 电流源

电流源的代表是变流器(CT; Current Transformer)。如图 5.2(a)所示,铁心的初级绕组的匝数为 n_1 (绕组的端子记作 K-L),次级绕组的匝数为 n_2 (端子记作 k-l)。CT 的工作原理是:初级绕组的电流 I_1 在 CT 铁心中产生的磁通,与次级绕组的电流 I_2 产生的磁通相互削弱。给初级绕组通以主电流 I_1 后,通过测定次级电流 I_2 计算出主电流。即

$$I_2 = I_1 \times (n_1 / n_2) = a I_1 \quad (a: \text{匝数比} = n_1 / n_2) \quad (5.2)$$

由于初级绕组和次级绕组处于绝缘状态,因此可以很方便地测出高电

压电路的电流。因为把改变交流电压大小的装置叫做变压器,所以变流器也因改变电流大小而得名。

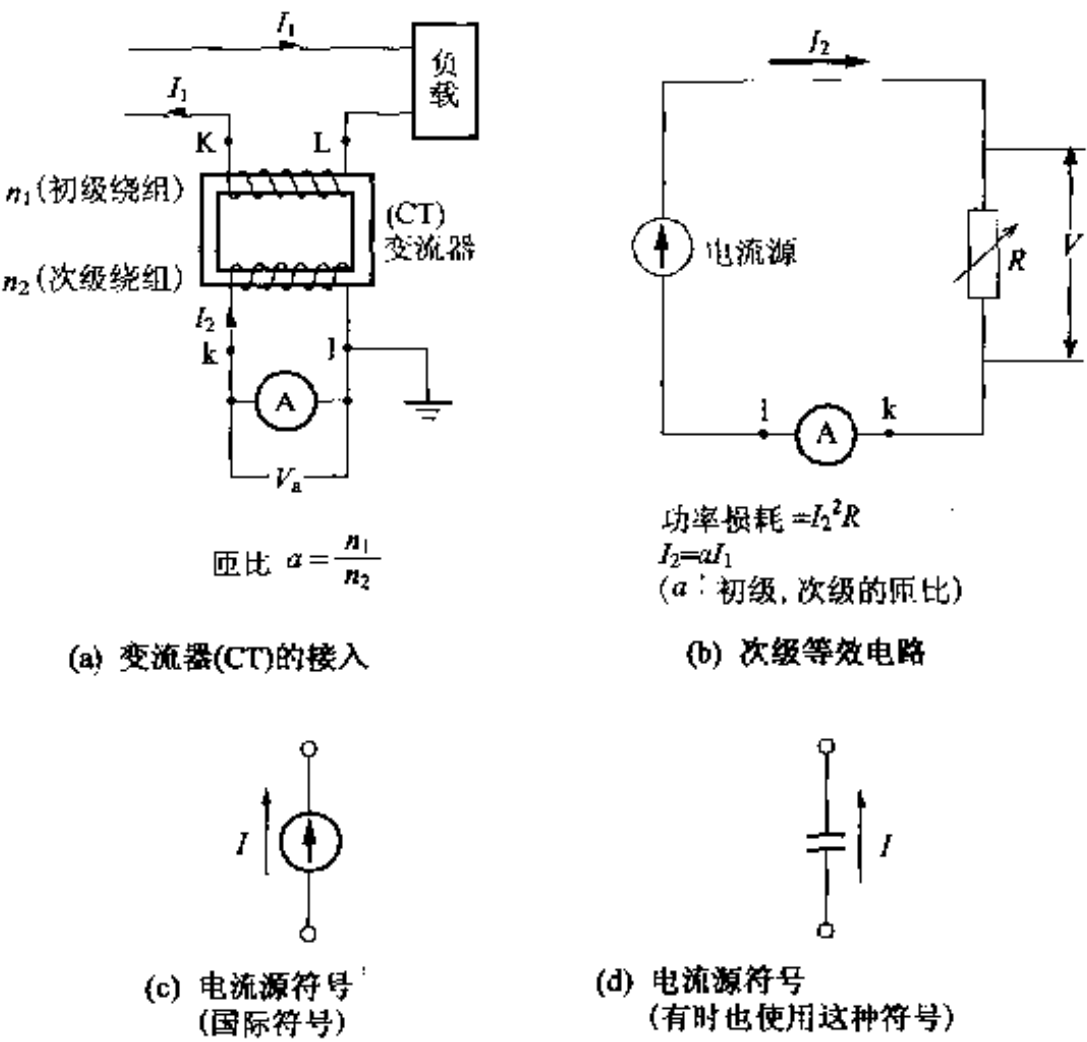


图 5.2

图 5.2(b)是连接有电流源 I_2 、负载电阻 R 和电流表 A 的电路。在此电路中,次级电流为定值,它与次级电路的负载 R 大小无关。给此电路接上一个内阻很小的电流表[如图 5.2(a)中的电流表]时,次级端近乎短路状态,所以次级电路的负载电压(此图中为电流表 A 的端电压 V_a)很小,因而发生在次级电路上的功率损耗($I_2 V_a$)也很少。另外,若连接一个适当的电阻 R ,那么,损耗的电能等于次级电路的电流和电阻 R 的端电压 V 之积,即

$$I_2 \cdot (R \cdot I_2) = (I_2)^2 R$$

综上所述,由于变流器的工作电流是个定值,它与负载大小无关,因此可以当作是电流源。上图中,产生在次级端上的电能是由 CT 的初级端供给的。

如果将 CT 的次级端开路(即连接一个无穷大电阻),就会有一个与绕组匝数成比例的次级电流通过这个无穷大电阻,因此开路端的电压非常高,电能损耗也很大(因为电压与电流的乘积大),所以绝对不能将 CT 的次级端开路。这与 PT(计器用变压器)的次级端不能短路是同样的道理。

若电源的电流一定,它不随负载电阻大小的改变而变化,把这样的理想电源定义为电流源,其国际通用的电路符号如图 5.2(c)所示。有时也用图 5.2(d)表示。为了避免与电压源符号混淆,本书采用图 5.2(c)的标记方法。

● 5.1.3 电压源与电流源的等效变换

前面提到,一般情况下电压源有内阻抗,而且它提供给外电路中的电压也随外电路阻抗的大小发生变化。图 5.3(a)中,令 ab 为电压源的两端,那么当电压源 V 供给负载电流时,ab 间的端电压 V_{ab} 为

$$V_{ab} = V - Z_i \cdot I \quad (5.3)$$

I 是流过电路的电流

$$I = V / (Z_i + Z)$$

故

$$V_{ab} = V(1 - Z_i / (Z + Z_i)) = V \cdot Z / (Z + Z_i) \quad (5.4)$$

$$J = \frac{V}{Z_i}, \quad Y = \frac{1}{Z}, \quad Y_i = \frac{1}{Z_i}$$

$$I_{Yi} = V_{ab} \cdot Y_i$$

$$I_Y = V_{ab} \cdot Y$$

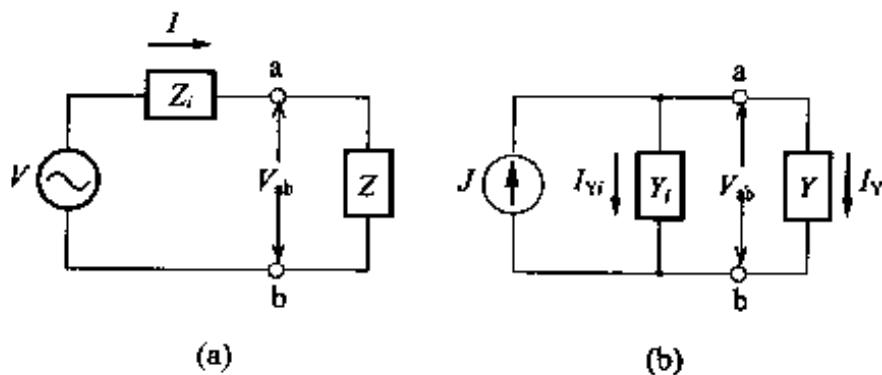


图 5.3 电压源与电流源的等效性

负载的端电压是 V 的 $Z/(Z+Z_i)$ 倍。内阻抗 Z_i 恒定时,可将 Z_i 看作是负载的一部分。

下面讨论与图 5.3 (a)电压源等效的电流源的情况;式(5.4)可变形为

$$V_{ab} = [Z \cdot Z_i / (Z + Z_i)] \cdot (V/Z_i) \tag{5.5}$$

把 V/Z_i 定义为 J ,由上式可知 J 为

$$\begin{aligned} J &= V/Z_i = (Z + Z_i) \cdot V_{ab} / (Z \cdot Z_i) \\ &= (1/Z + 1/Z_i) \cdot V_{ab} = (Y + Y_i)V_{ab} = I_Y + I_{Y_i} \end{aligned} \tag{5.6}$$

式中 J 为电流源, $Y=1/Z, Y_i=1/Z_i$ 。

满足式(5.6)的电路如图 5.3(b)所示。因此,连接有电压源,电源的入端阻抗 Z_i 和负载阻抗 Z 的电路(图 5.3(a)),与连接有 $J=V/Z_i$ 的电流源、入端导纳 Y_i 和负载导纳 Y 的电路等效(图 5.3(b))。即内阻抗为 Z_i 的电压源可以变换为并联有内导纳 $Y_i=1/Z_i$ 、电流为 $J=V/Z_i$ 电流源。

综上所述,可将理想电压源与理想电流源作如下比较(见表 5.1)。

表 5.1 理想的电压源和电流源

	大小	内阻	性质
电压源	V	0	与负载无关电压恒定
电流源	J	无限大	与负载无关电流恒定

当电压源内阻极小、接近 0 时可认为是理想电压源。电压源的特点是:电压恒定,大小与负载无关。由式(5.5)可求出流过负载导纳 Y 的电流,即

$$I_y = V_{ab} \cdot Y = J \cdot Y / (Y_i + Y) = (V/Z_i) \cdot (Y / (Y_i + Y))$$

把 $Y_i=1/Z_i, Y=1/Z$ 代入上式,可得

$$I_y = (V/Z_i) \cdot (1 / (1 + Z/Z_i)) \tag{5.7}$$

如果 $Z_i \rightarrow \infty$ (即 $Y_i \rightarrow 0$),则

$$I_y \approx V_i/Z_i = J$$

因此,可以说,电流源是内部电压 V 和内阻抗 Z_i 同时增大,且比值一定,即电流 $J=V/Z_i$ 为恒值的特殊电源。由此我们知道电压源和电流源是对等的。下面再回到表 5.1。对实际电源来说,电压源因为有一定的内阻,所以其端电压随着负载上电流的增大而减小。同样,由于电流源的内阻不可能为无穷大,因此,电流随负载电阻的增大而减小。

5.2 叠加定理

● 5.2.1 含电压源时的叠加

含有多个电压源的电网络中,任意一条支路上的电流等于各个电压源单独作用时在此支路上所产生的电流之和,这就是叠加定理(law of superposition)。电网络中,除电压源外,含有电流源时(即既有电压源,又有电流源),此定理也成立。

为了使叠加定理浅显易懂,下面用一个简单的电路(图 5.4)加以说明。

图 5.4(a)中连接了两个电压源 V_1 和 V_2 。计算此电路中各闭合回路电流 I_1 、 I_2 、 I_3 时,可先计算在电压源 V_1 单独作用下产生在各闭合回路中的电流 I_{11} 、 I_{12} 、 I_{13} ,此时 V_2 为零($2-2'$ 短路),如图 5.4(b)所示。然后计算在电压源 V_2 单独作用下各闭合回路中的电流 I_{21} 、 I_{22} 、 I_{23} ,此时 V_1 为零($1-1'$ 短路),如图 5.4(c)所示。最后求和,便可得到闭合回路的电流

$$I_1 = I_{11} + I_{21}$$

$$I_2 = I_{12} + I_{22}$$

$$I_3 = I_{13} + I_{23}$$

这就是叠加定理。

下面通过对实例图 5.5 电路的计算以帮助读者加深理解。一般情况下,总是先根据叠加定理将电路分解为图 5.5(b)、图 5.5(c)所示的两个单一电压源电路,求出各闭合回路的电流 I_{10} 、 I_{20} 、 I_{01} 、 I_{02} ,然后求支电流 I_{11} 、 I_{12} 、 I_{13} 、 I_{21} 、 I_{22} 、 I_{23} 。但是,因为此电路比较简单,故可先求支电流 I_{11} 、 I_{12} 、 I_{13} 、 I_{21} 、 I_{22} 、 I_{23} 。

图 5.5(b)中, Z_2 和 Z_3 并联后又与 Z_1 串联,因此, I_{11} 为

$$I_{11} = V_1 / (Z_1 + (Z_2 \cdot Z_3) / (Z_2 + Z_3))$$

$$= (Z_2 + Z_3) V_1 / (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)$$

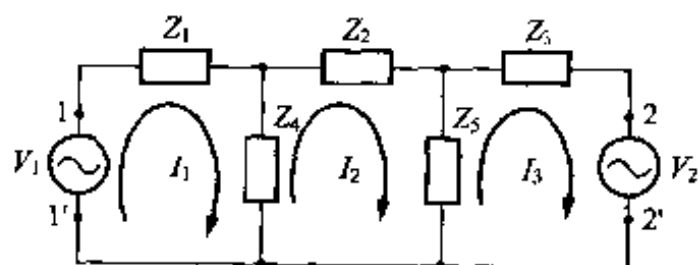
$$I_{12} = I_{11} \cdot (Z_3 / (Z_2 + Z_3)) = Z_3 \cdot V_1 / (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)$$

$$I_{22} = V_2 / (Z_2 + (Z_1 \cdot Z_3) / (Z_1 + Z_3))$$

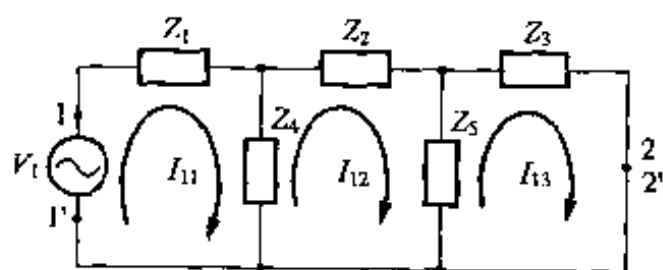
$$= (Z_1 + Z_3) V_2 / (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)$$

$$I_{21} = I_{22} \cdot (Z_3 / (Z_1 + Z_3)) = Z_3 \cdot V_2 / (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)$$

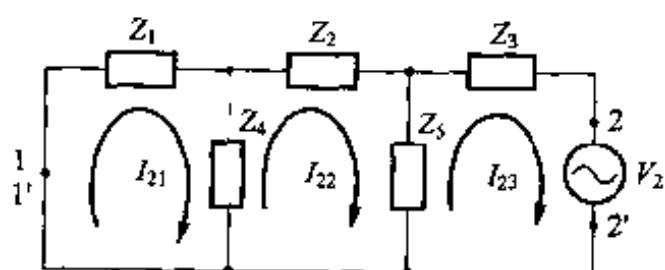
这里需要注意电流方向。用 I_{11} 、 I_{12} 、 I_{22} 、 I_{21} 表示图 5.5(a) 中的闭合回路电流, I_1 、 I_2 为



(a)

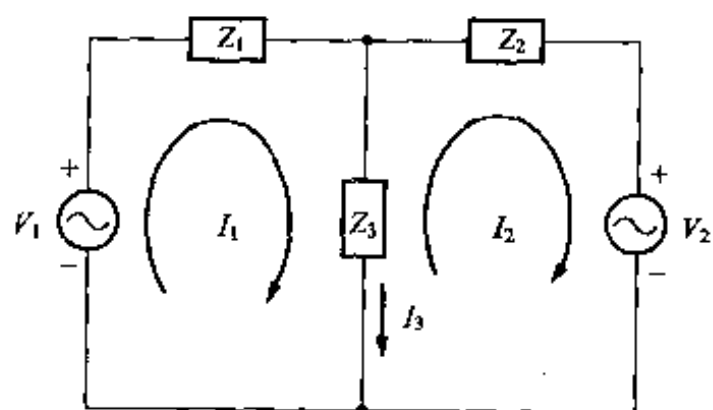


(b)

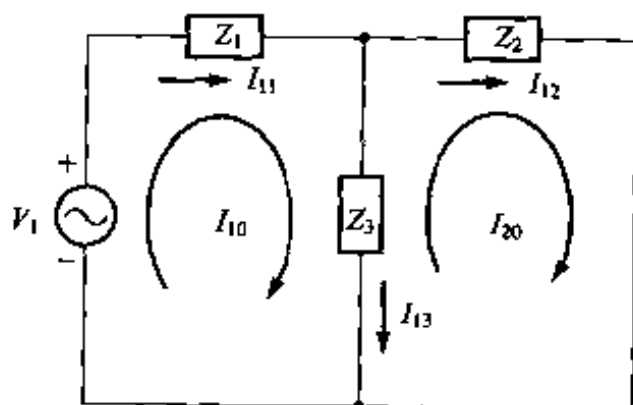


(c)

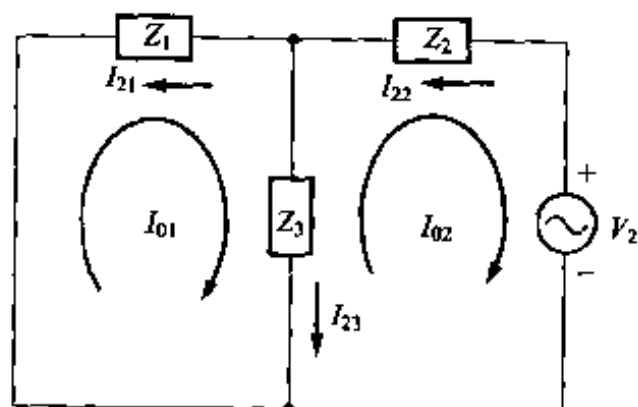
图 5.4 叠加定理



(a)



(b)



(c)

图 5.5 根据叠加定理计算电流的示例
[V_1 产生的电流(b)和 V_2 产生的
电流(c)叠加后为(a)]

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_{11} - I_{21} \\ I_2 &= I_{12} - I_{22} \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

建立图 5.5(a) 闭合回路电流方程式如下:

$$\left. \begin{aligned} (Z_1 + Z_3)I_1 - Z_3I_2 &= V_1 \\ -Z_3I_1 + (Z_2 + Z_3)I_2 &= -V_2 \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

由上式可求出 I_1 、 I_2 为

$$\begin{aligned} I_1 &= [(Z_2 + Z_3)V_1 + Z_3(-V_2)] / (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1) \\ I_2 &= [Z_3V_1 + (Z_1 + Z_3)(-V_2)] / (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1) \end{aligned} \quad (5.10)$$

可以很容易证明式(5.10)中的电流 I_1 、 I_2 的大小等于式(5.8)中的电流 I_1 、 I_2 。图 5.5(b)中 I_{13} 与图 5.5(c)中 I_{23} 的大小为

$$\begin{aligned} I_{13} &= I_{11} \cdot (Z_2 / (Z_2 + Z_3)) = Z_2 \cdot V_1 / (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1) \\ I_{23} &= I_{22} \cdot (Z_1 / (Z_1 + Z_3)) = Z_1 \cdot V_2 / (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1) \end{aligned} \quad (5.11)$$

图 5.5(a)的电流 I_3 为

$$I_3 = I_{13} - I_{23} = (V_1Z_2 - V_2Z_1) / (Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1) \quad (5.12)$$

可以看出,式(5.11)的 $(I_{13} + I_{23})$ 与式(5.12)的 I_3 相等。

这正是叠加定理。对于任意线性电网络,叠加定理都成立。凡是叠加定理成立的电路也都是线性电路。

● 5.2.2 含电流源时的叠加

当电路中既有电压源又有电流源时,首先,利用图 5.3(a,b)的等效电路将电流源变换为电压源,这样就和只有电压源的计算方法相同。如图 5.6(b)所示,电流源内部导纳 Y_i 就相当于将电流源在 $\times$ 记号处开路后 ab 端的入端阻抗,即

$$1/Y_i = Z_i$$

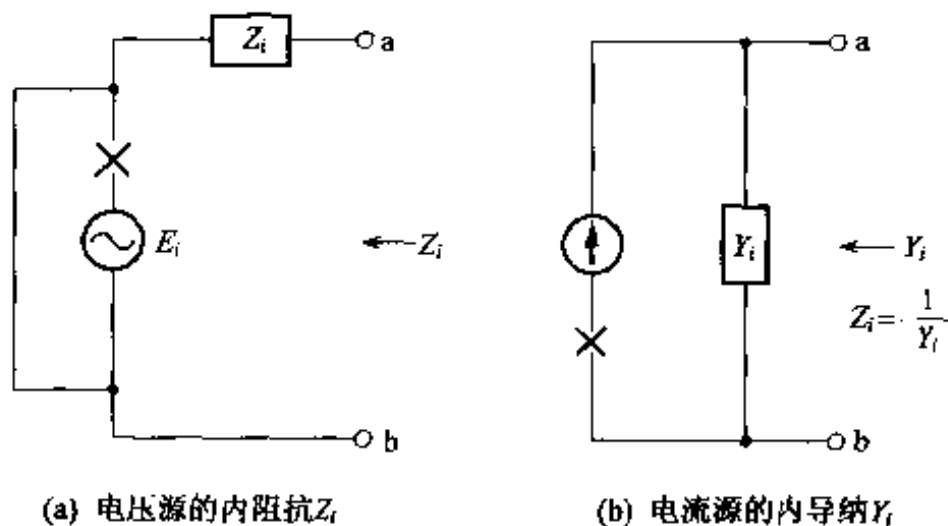


图 5.6 电压源的内阻抗 Z_i 与电流源并联导纳 Y_i 的等效性

综上所述,含有电流源时,可以通过对电流源开路,把电流源从电路中

除去,对于与电流源并联的导纳,只要把它当作电源内阻,并计算出相当于内阻的值即可。这样就可以把电流源转换为电压源。其计算方法与只含有电压源的计算方法相同。

5.3 戴维宁定理

如图 5.7 所示,对于含有三个电压源 V_{01} 、 V_{02} 、 V_{03} 的电路,给图 5.7(a) 的 AB 端接入一个阻抗 Z (图 5.7(b)),那么流过 Z 上的电流就等于未接入阻抗之前(图 5.7(c))AB 间的电压 V_i (开路电压)除以 $(Z+Z_i)$ 。这就是戴维宁定理。这里的 Z_i 是图 5.7(d) 或图 5.7(e) 中端子 A-B 电源侧的入端阻抗(入端阻抗就是指图 5.7(d) 中所有电压源为 0 时两端子间的等效阻抗)。

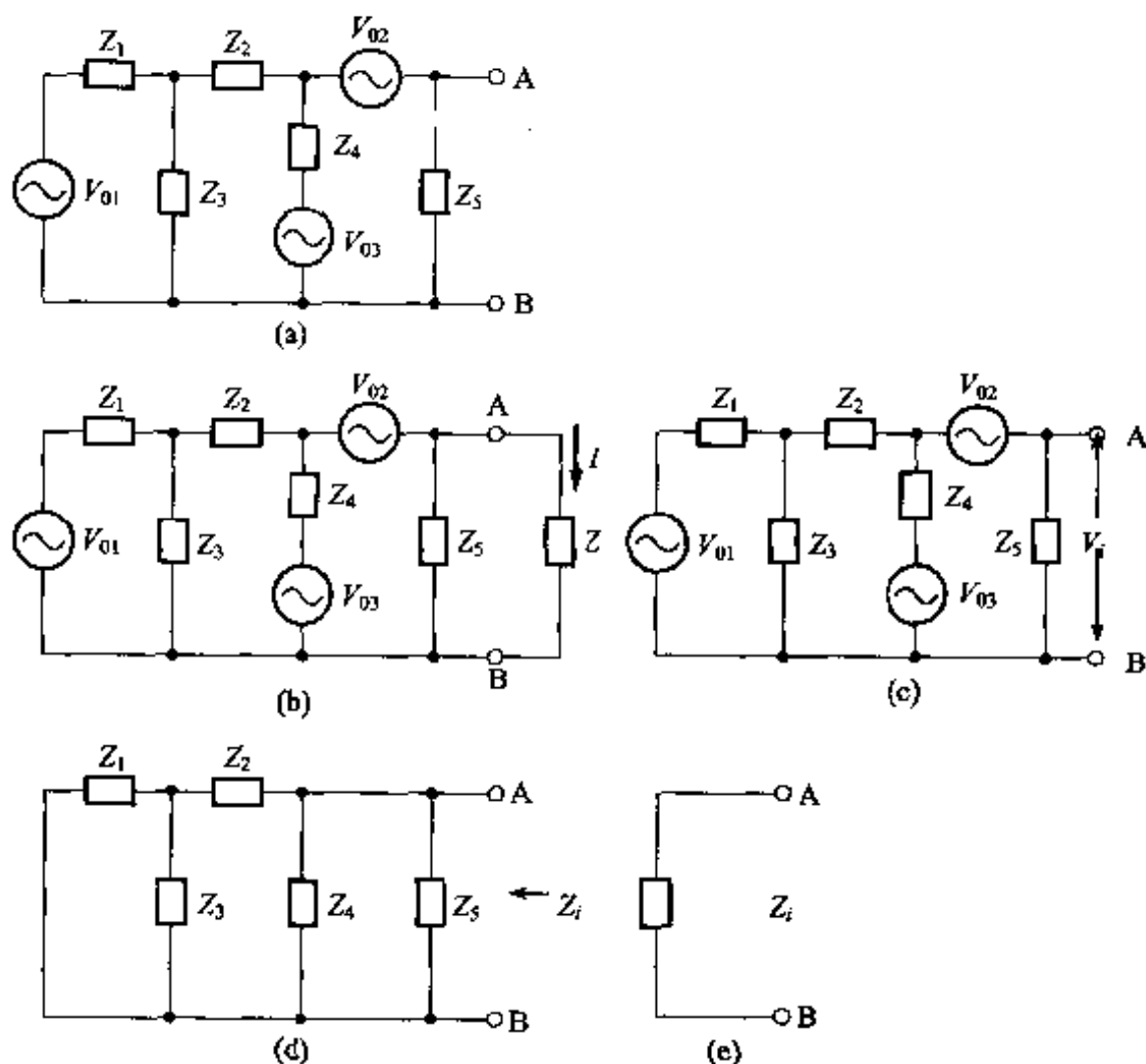


图 5.7 戴维宁定理

下面来证明戴维宁定理。仍以图 5.7 为例, AB 间断开时, 其端电压为 V_i , 若给断开处接入一个电压等于 V_i 的电压源及其串联阻抗 Z 的组合, 如图 5.8(a) 所示, 因二者相互抵消, 所以电流 I_z 为 0。根据叠加定理, 可将图 5.8(a) 分解成图 5.8(b) 和图 5.8(c), 即图 5.8(b) 中除去 AB 端左侧的电源, 保留 AB 右侧电源; 图 5.8(c) 中保留 AB 端左侧电源, 除去右侧电源。将图(b)、图(c)中的两个电流记作 I_{z1} 和 I_{z2} , 因两者方向相反, 而总电流又为 0, 因此, $I_{z1} = I_{z2}$ 。

图 5.8(c) 的电路与上面讨论的电路(图 5.7(b))相同。因此, 待求电流 I 等于 I_{z2} , I 大小也等于图 5.8(b) 中的 I_{z1} , 但两者方向相反。AB 左侧的电路可以转化为图 5.7(d)。将 5.7(d) 进一步整理, 最后可转换为一个内阻抗 Z_i (图 5.7(e))。因此, 待求电流 I 的电路就变成了把图 5.7(b) 的电源反置后的图 5.8(e), 所以, 可得出式

$$I = V_i / (Z + Z_i) \quad (5.13)$$

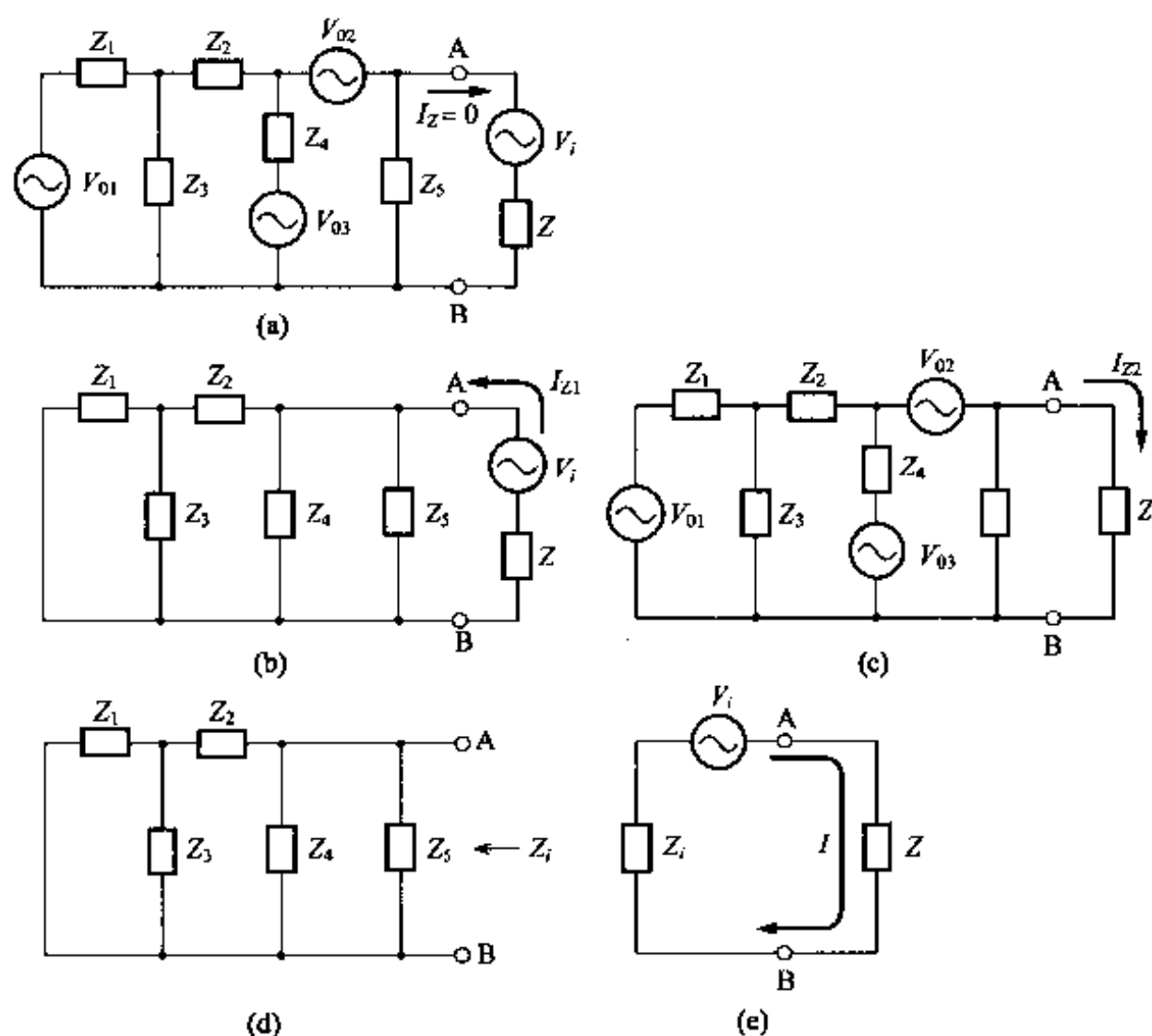


图 5.8 戴维宁定理的说明

5.4 诺顿定理

图 5.9(a,b)为表述诺顿定理的示意图。对于含电流源的电路 NO, 如果入端导纳为 $Y_i = 1/Z_i$, 两端短路时的电流 $I = V/Z_i = VY_i$ (此处, 将 J 更换为 I), 当给电流为 I 的支路并联一个导纳为 Y 的负载 N 时, 负载 N 上产生的端电压 V_{ab} 为

$$V_{ab} = I / (Y_i + Y) \quad (5.14)$$

这就是诺顿定理。

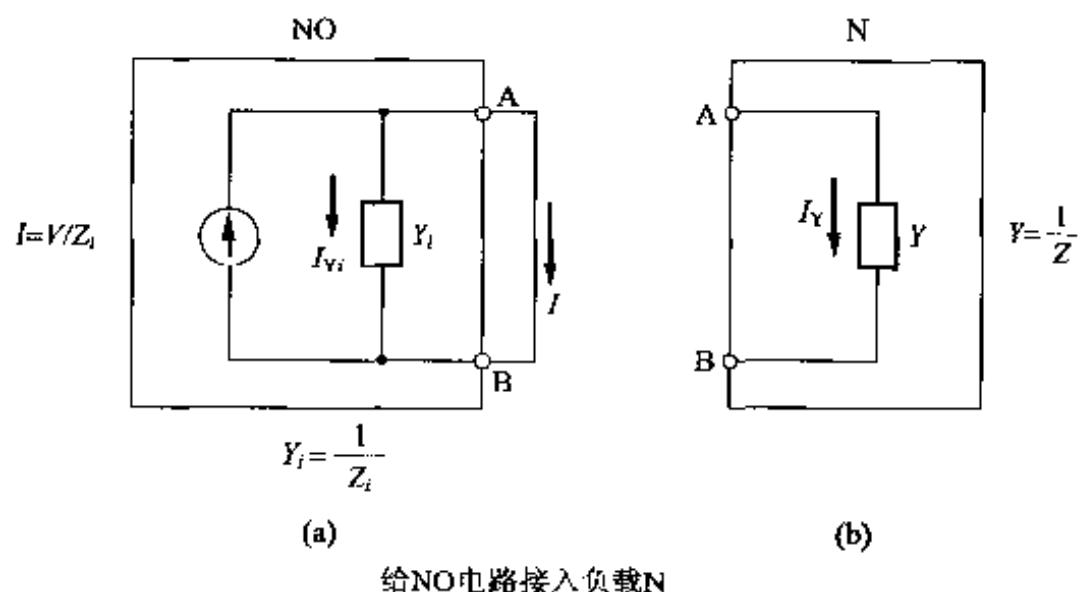


图 5.9 诺顿定理

戴维宁定理与诺顿定理是相互关联的。两定理的内容完全一致, 只是表达方式不同而已。下面我们就以图 5.3 为例, 从电压源与电流源的等效性来证明戴维宁定理与诺顿定理的一致性。图 5.3 中, 若 $J = V/Z_i$, $Y_i = 1/Z_i$, 则这两个电源为等效电源(已在前面论述过)。

如图 5.9 所示, 若将其置换成电压为 V 、内阻抗为 Z_i 的电流源, 且 AB 端的短路电流为 $I = V/Z_i$, 然后在短路处连接一个导纳 Y , 由于导纳 Y_i, Y 的外加端电压为 V_{ab} , 因此, 通过两个导纳的电流分别是

$$I_{y_i} = V_{ab} Y_i$$

$$I_y = V_{ab} Y$$

而 I_{y_i} 与 I_y 之和等于电流源提供的电流, 因此

$$V/Z_i = I = V_{ab} \cdot (Y_i + Y) \quad (5.15)$$

在此,我们也一并证明了诺顿定理。

【例 5.1】求图 5.10(a)中的电流 I 。

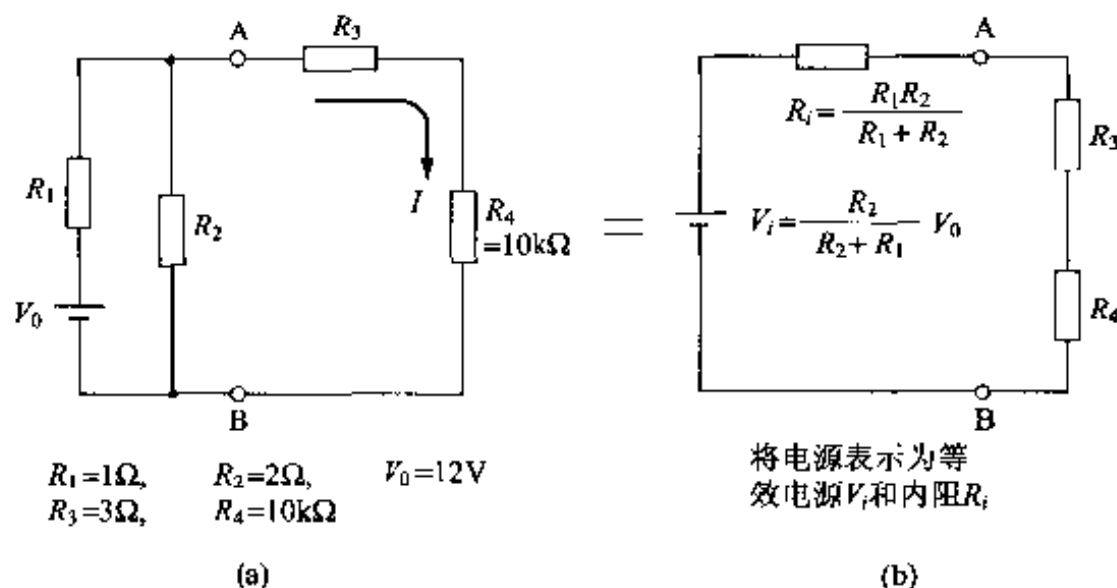


图 5.10 戴维宁定理计算示例

解 应用戴维宁定理求电流时,可将 V_0 、 R_1 、 R_2 进行如图 5.10(b)的变换。即将 V_0 替换为 AB 的开路电压源 V_i , R_1 、 R_2 替换为端子 A-B 电源侧的入端阻抗 R_i 。 V_i 、 R_i 的计算如下:

$$V_i = V_0 \cdot (R_2 / (R_1 + R_2)) = 12 \times (2 / (1 + 2)) = 8V$$

$$R_i = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) = (1 \times 2) / (1 + 2) = 0.67\Omega$$

由此可知电流 I 为

$$I = V_i / (R_i + R_3 + R_4) = 8 / (0.67\Omega + 3\Omega + 10k\Omega) \approx 0.8mA$$

【例 5.2】求图 5.11(a)中流过阻抗 R_3 的电流 I_3 。

解 可将图 5.11(a)变换为图 5.11(b)。具体计算如下:

$$I_i = V_1 / R_1 + V_2 / R_2, \quad R_i = R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$$

因为 I_3 是 I_i 在 R_i 和 R_3 上的分流,所以

$$\begin{aligned} I_3 &= I_i \times R_i / (R_i + R_3) \\ &= (V_1 / R_1 + V_2 / R_2) (R_1 \cdot R_2) / (R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1) \quad (5.16) \end{aligned}$$

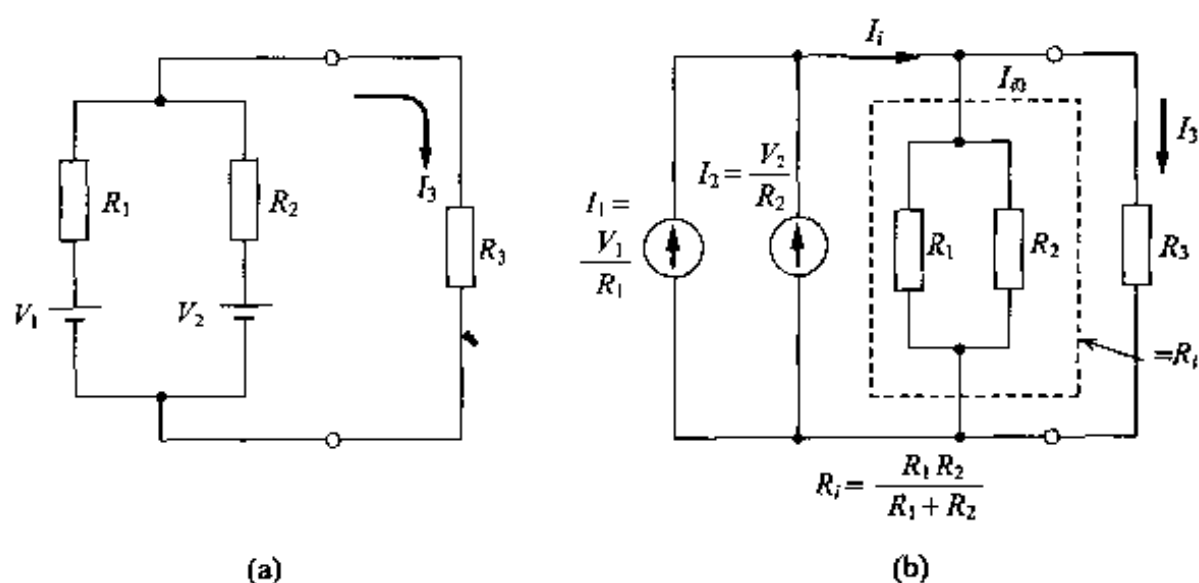


图 5.11 诺顿定理的计算示例

5.5 补偿定理

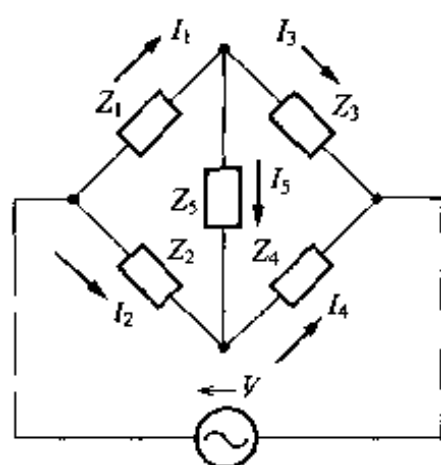
在电流为 I_0 的支路中串联一个新阻抗 ΔZ 后, 电路中产生的电压与电流的变动量等于将电路中所有电源为 0, 且给 ΔZ 串联一个与 I_0 反向的电压源 $\Delta Z I_0$ 时电路中的电压和电流。

为了便于理解, 我们以图 5.12 为例加以说明。

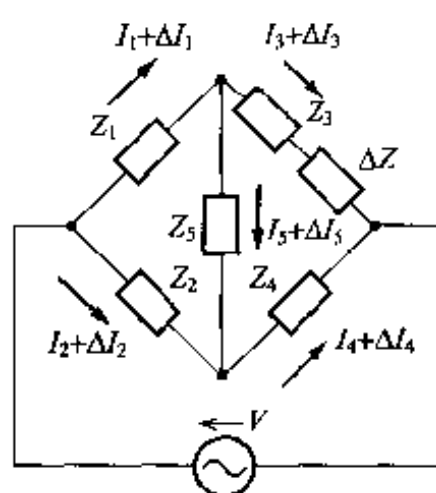
图 5.12(a) 是未连接 ΔZ 时的电路。现给 Z_3 支路串联 ΔZ , 那么流过 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 、 Z_4 、 Z_5 的电流会发生什么变化呢? 一般的计算方法是: 如图 5.12(b) 所示, 先建立新的回路方程式, 求出 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 、 I_5 。然后, 用图 5.12(a) 中的已知的 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 、 I_5 减去这些新回路中对应的电流, 就可求出电流的变化量。但是, 这种计算方法比较繁琐。如果应用补偿定理, 电路中电压与电流变化量的计算就会变得非常简单。

应用补偿定理时, 如图 5.12(c) 所示, 首先, 将图中电压源 V 处短路, 给 Z_3 串联接入 ΔZ_3 , 再串联与 I_3 方向相反的电压源 $\Delta Z I_3$, 然后计算此电路中流过 Z_1 、 Z_2 、 Z_3 、 Z_4 、 Z_5 的支路电流 I_1 、 I_2 、 I_3 、 I_4 、 I_5 。这些电流就是在给 Z_3 支路上接入 ΔZ 后电路中电流的变化量。

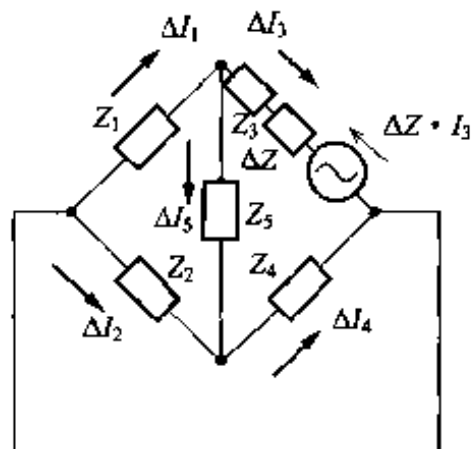
这就是补偿定理的内容。证明如下:



(a) 原电路



(b) 给 Z_3 连接 ΔZ



(c) 从(a)电路变成(b)电路时计算各部分电流变化量的电路图(定理)

图 5.12 补偿定理的说明

图 5.13(a)为原电路图,图 5.13(b)为接入 ΔZ 后的电路图¹⁾。下面讨论图 5.13(c)和图 5.13(d)。对于图 5.13(c)来说,假设通过 ΔZ 的电流为 I_3 ,则 ΔZ 上的电压为 $\Delta Z \cdot I_3$,这与新接入的电压源相互抵消,所以流过 Z 的电流仍为 I_3 ,即与图 5.13(a)未接入负载 ΔZ 时相同。图 5.13(d)中,令原电压源 V 为 0,并在接入 ΔZ 的状态下给 ΔZ 串联一个与 I_3 反向的电压源 $\Delta Z \cdot I_3$ 后所产生的电压、电流与图中的变化量相等。这就是补偿定理的内容,它表示了因增加阻抗而产生的电流的变化量。

图 5.13(c)与图 5.13(d)相互叠加后即 为图 5.13(b)。两图的叠加组合中因含有图 5.13(a)的电源,所以与图 5.13(a)的电压源相同,而且因电压源 $\Delta Z \cdot I_3$ 在图 5.13(c,d)中方向相反,故而互相抵消了。由此可知, Z_3 支路中接入了负载 ΔZ 是图 5.13(c)与图 5.13(d)叠加后的结果。通过以上的分析, 可根据图 5.13(d)计算出电流的变化量。

下面通过对图 5.14 所示的简单电路的分析计算来加深对补偿定理的理解。

图 5.14(a)为原电路图,图 5.14(b)为给 Z 接入 ΔZ 后的电路图,图 5.14(c)是(图(a)变为图(b)时)表示电流变化的示意图。

接入 ΔZ 后,电流的变化量等于图(b)的电流减去图(a)的电流。即

$$\Delta I = I' - I = V/(Z + \Delta Z) - V/Z = (-V/Z) \cdot \Delta Z/(Z + \Delta Z) \quad (5.17)$$

另外,由补偿定理可知,电流的变化量 ΔI 就等于在 Z 与 ΔZ 串联的状

1) 图中电压源 $\Delta Z \cdot I_3$ 应去掉。——译者注

态下给电路接入一个与电流方向相反的电压源 $V_c = \Delta Z \cdot I$ 时回路中的电流,即

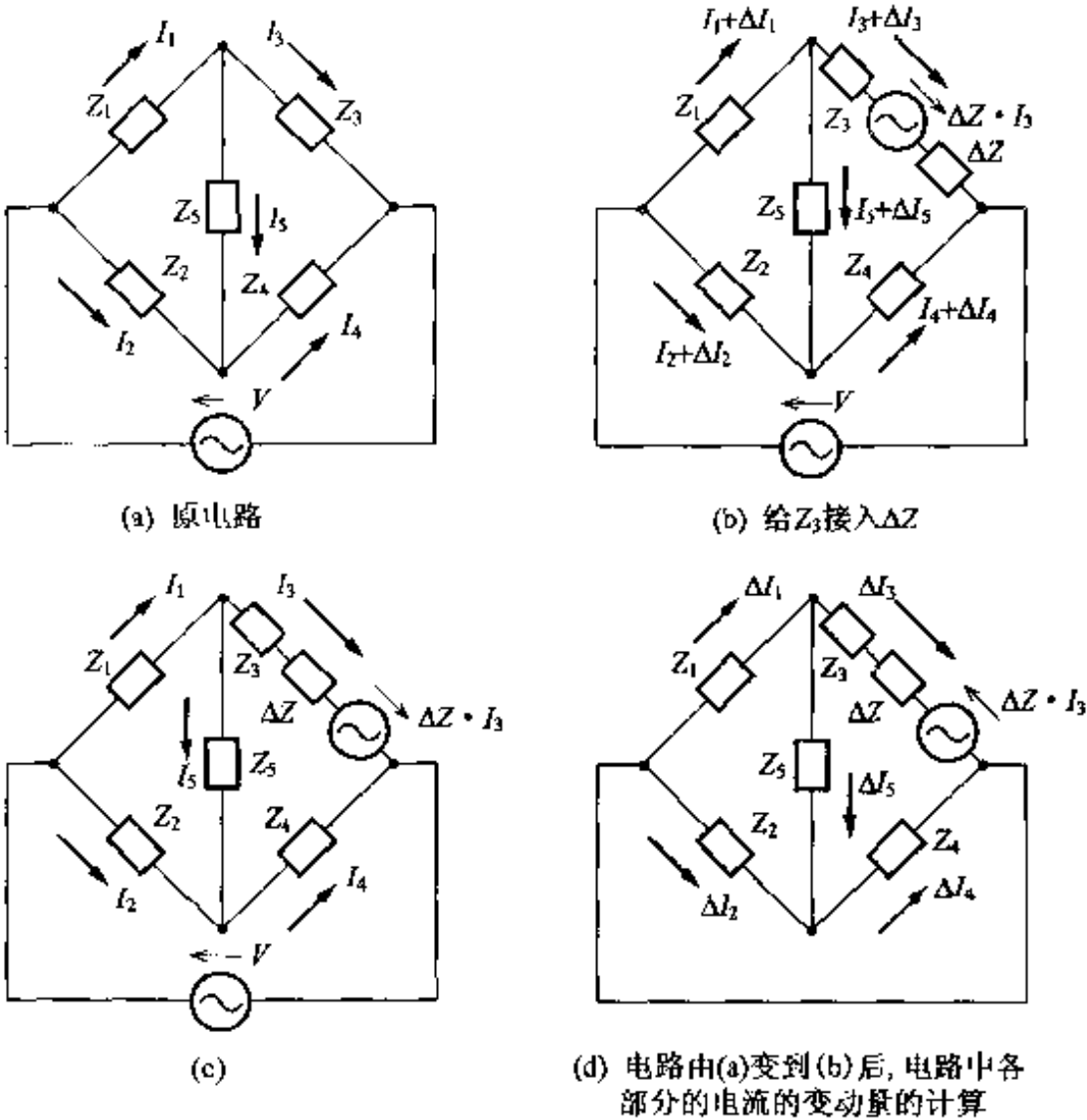


图 5.13 补偿定理的说明

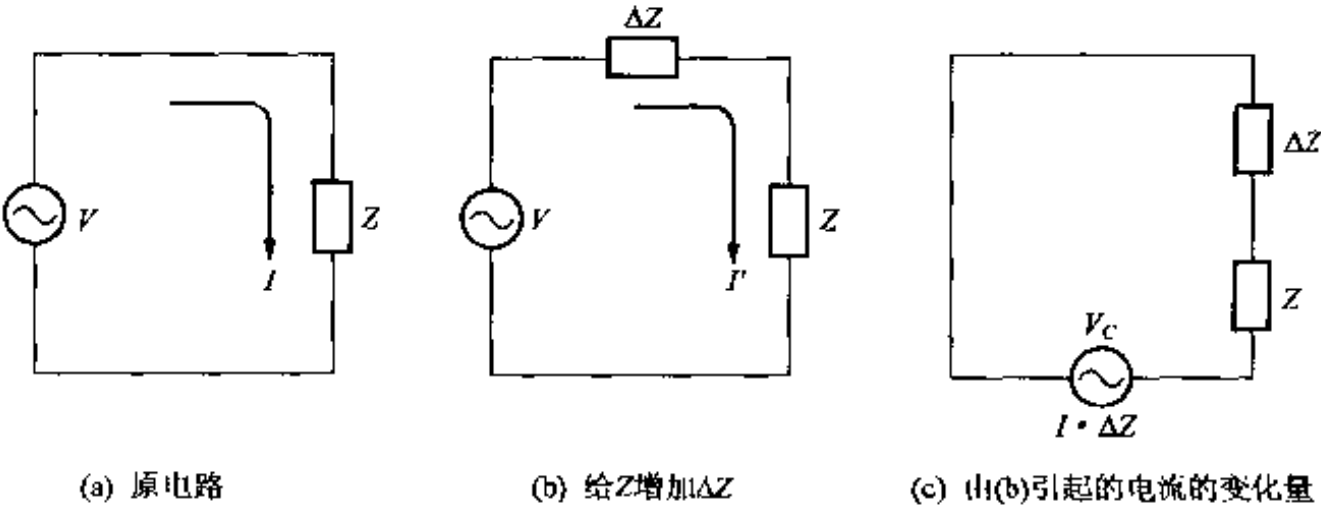


图 5.14 补偿定理的简单示例

$$\begin{aligned}\Delta I &= -V_c/(Z + \Delta Z) = -I \cdot \Delta Z/(Z + \Delta Z) \\ &= (-V/Z) \cdot \Delta Z/(Z + \Delta Z)\end{aligned}\quad (5.18)$$

式中 $-V_c$ 表示与参考方向相反。

通过对式(5.17)与式(5.18)的比较可以知道两式中的 ΔI 相同。

5.6 最大功率传输定理

在通讯、自动控制等电子电路中,由于传输的功率较小,往往要求电源能够传输给负载最大功率。而电源能否传输给负载最大功率,这跟电源内

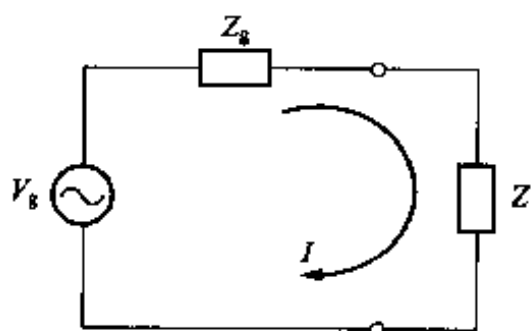


图 5.15 最大功率传递定理

阻抗及负载的性质有着紧密关系。下面我们讨论在何种情况下,电源传输给负载的功率为最大。

如图 5.15 所示,给内阻抗为 Z_g 的电压源 V_g 接上一个负载 Z ,将内阻抗负载表示为电阻分量与电抗分量之和的形式,即

$$\left. \begin{aligned}Z_g &= R_g + jX_g \\ Z &= R + jX\end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

电流 I 为

$$I = V_g/(Z_g + Z) = V_g/((R_g + R) + j(X_g + X)) \quad (5.20)$$

负载电阻消耗的功率为

$$P = RI^2 = R \cdot V_g^2/[(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2] \quad (5.21)$$

因此,所讨论的问题就变成了当负载为何值时,才能获得最大功率 P 。

● 5.6.1 负载的电阻分量和电抗分量可变时

一般来说,负载的阻抗值不是能任意改变的。这里,我们假设电阻与电抗都可任意改变。由式(5.12)知,分母中含有 X 的部分 $(X_g + X)^2$ 的值越大, P 就越小。只有当 $(X_g + X)$ 为0时, P 最大,最大值为

$$P = R \cdot V_g^2/(R_g + R)^2 \quad (5.22)$$

改变 R ,使 P 达到最大,则必须满足 $dP/dR=0$,而

$$\begin{aligned}dP/dR &= \{(R_g + R)^2 - R \cdot 2(R_g + R)\}V_g^2/(R_g + R)^4 \\ &= (R_g^2 - R^2)/(R_g + R)^4\end{aligned} \quad (5.23)$$

由此可得 $R_g = R$ 。因此,负载阻抗为

$$Z = R_g - jX_g \quad (5.24)$$

从上面的分析计算可知,当负载阻抗等于内阻抗的共轭值时,负载能够获得最大功率(将 $R_g + jX_g$ 中的虚部异号即得其共轭值为 $R_g - jX_g$)。

负载获得的最大功率为

$$P_{\max} = 1/4 \cdot V_g^2 / R_g \quad (5.25)$$

式(5.24)为最大功率匹配条件,即负载获得最大功率必须满足的条件。电源与负载达到匹配时,电路中的电流为

$$I = V_g / 2R_g$$

R_g 上的功率损耗为

$$I^2 R_g = 1/4 \cdot V_g^2 / R_g = P_{\max}$$

另外,因为电源供给的功率为

$$P_s = V_g^2 / (2R_g) = 2P_{\max} \quad (5.26)$$

所以有一半的功率损耗在电源内阻抗上了。

● 5.6.2 负载的电阻分量可变时

此条件下,保持(5.21)式中的 $X_g + X$ 不变,只要求出当 R 大小改变时, P 的最大值即可,即

$$\begin{aligned} dP/dR &= [(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2 - 2R(R_g + R)]V_g^2 / \\ &[(R_g + R)^2 + (X_g + X)^2]^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

由式(5.27)得

$$R^2 = R_g^2 + (X_g + X)^2 \quad \text{或} \quad R = \sqrt{R_g^2 + (X_g + X)^2}$$

只有当 R 满足上式的条件负载才能获得最大功率。此时,电源提供的有效功率为

$$P_{\max} = \frac{V_g^2}{2} \cdot \frac{1}{R_g + \sqrt{R_g^2 + (X_g + X)^2}} \quad (5.28)$$

● 5.6.3 负载的大小可变但功率因数一定时

可令式中 θ 一定, Z 可变。将

$$R = Z\cos\theta \quad X = Z\sin\theta$$

代入式(5.21),可得

$$P = Z\cos\theta \cdot V_g^2 / \{(R_g + Z\cos\theta)^2 + (X_g + Z\sin\theta)^2\} \quad (5.29)$$

令 $dP/dZ=0$, 则

$$\begin{aligned} dP/dZ = & \cos\theta \cdot V_g^2 [\{(R_g + Z\cos\theta)^2 + (X_g + Z\sin\theta)^2\} \\ & - Z \cdot \{2(R_g + Z\cos\theta)\cos\theta + 2(X_g + Z\sin\theta)\sin\theta\}] / \\ & \{(R_g + Z\cos\theta)^2 + (X_g + Z\sin\theta)^2\}^2 = 0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

整理上式中方括号部分, 可得

$$Z^2 = R_g^2 + X_g^2 \quad (5.31)$$

即当电源的内部阻抗与负载的阻抗相等时, 负载可获得最大功率。最大功率为

$$P_{\max} = \frac{V_g^2 \cdot \cos\theta}{2(R_g \cos\theta + X_g \sin\theta + \sqrt{R_g^2 + X_g^2})} \quad (5.32)$$

上面讨论了简单电路的情形, 对于一般的电路, 根据戴维宁定理, 可将其变换为图 5.7(d) 或图 5.7(e), 上述结果仍然成立。

【例 5.3】 计算图 5.16 中负载 Z 获得最大功率时 Z 的大小。

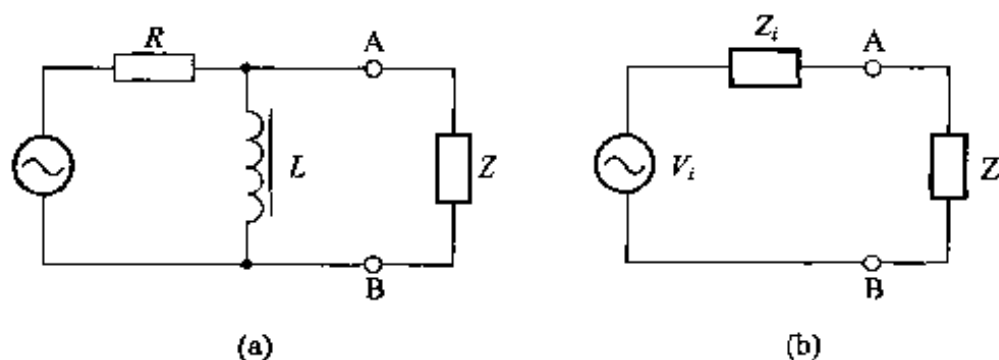


图 5.16 从有内阻抗的电源获得最大功率时负载阻抗的计算

解 将其转换为图 5.16(b) 的等效电路。此时 Z 的开路端 A-B 的入端内阻抗为

$$\begin{aligned} Z_i &= R \cdot j\omega L / (R + j\omega L) \\ &= R \cdot j\omega L (R - j\omega L) / \{(R + j\omega L)(R - j\omega L)\} \\ &= \{(\omega L)^2 + j\omega LR\} R / (R^2 + (\omega L)^2) \end{aligned} \quad (5.33)$$

由负载获得最大功率的条件(式(5.24))可知, 只要 Z 为电源内阻抗 Z_i 的共轭复数值即可, 因此

$$Z = \{(\omega L)^2 - j\omega LR\} R / (R^2 + (\omega L)^2) \quad (5.34)$$

►► 练习题

习题 1

应用叠加定理求图 5.17 中的电流 I_1 、 I_2 、 I_3 。

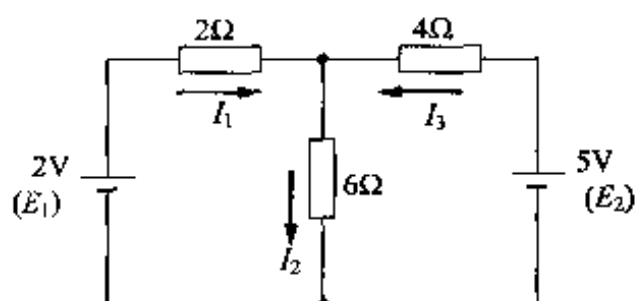


图 5.17

习题 2

以 A-B 为端口画出图 5.18 的戴维宁等效电路, 并求电源内阻抗 Z_0 和等效电源 V_0 。

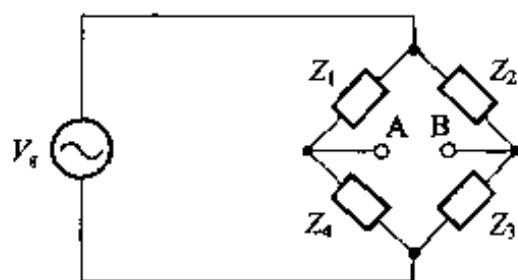


图 5.18

习题 3

把入端阻抗为 Z_1 、 Z_2 、 $\dots$ 、 Z_n , 端子电压为 E_1 、 E_2 、 $\dots$ 、 E_n 的 n 个电路, 连接成如图 5.19 的串联形式。设连接导体的阻抗为 Z_0 。求电路电流 I 和第 i 个回路中的端电压。

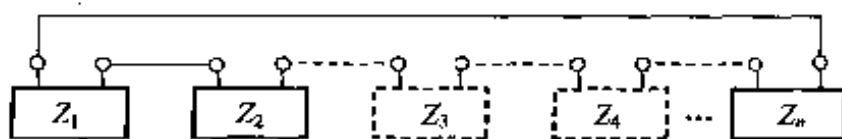


图 5.19

习题 4

将图 5.20(a) 连接成图 5.20(b), 求连接点的电压和电流。

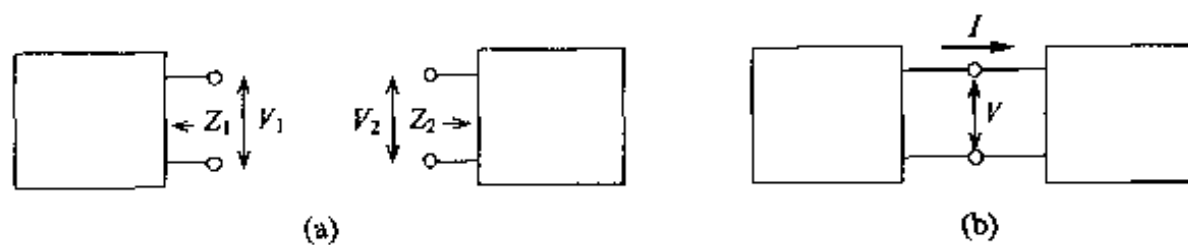


图 5.20

习题 5

应用戴维宁定理求图 5.21 中接入 Z_5 后的电流。

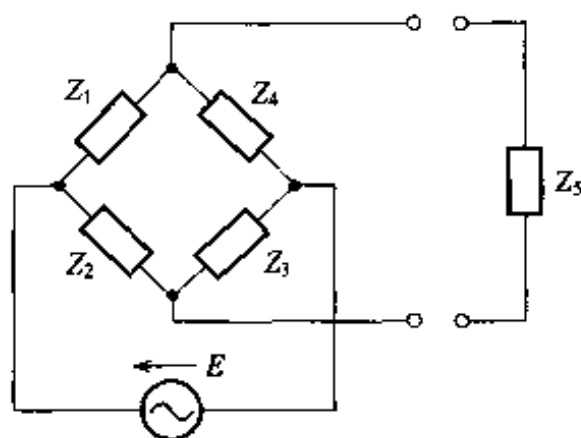


图 5.21

习题 6

在图 5.22 的电路中,问当电阻为何值时获得的功率最大。

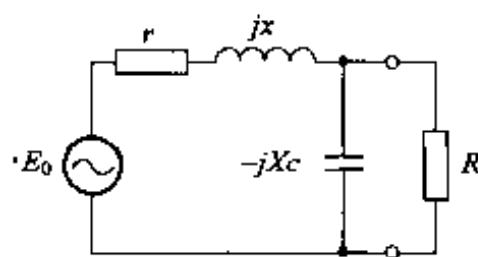


图 5.22

习题 7

求图 5.23(a) 中增加一个阻抗 $\Delta Z = 2 + j1$ 后(图 5.23(b))电流的变化量。

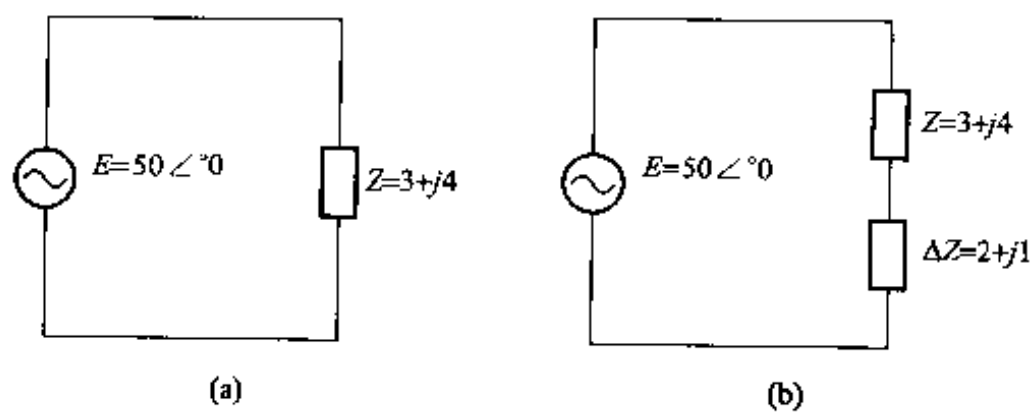


图 5.23

第 6 章 失真交流波

在第 3、4 章我们学习了正弦交流波。在实际的电路中,有很多波形虽然也是在周期性变化,但因波形的结构复杂,他们无法用单一的正弦或余弦波表示(如图 6.1 所示)。把这种不按正余弦周期规律变化的交流波称为失真交流波。

本章首先介绍实际中常常出现的失真波是如何由正弦波叠加构成的,然后讨论失真波的有效值、功率、功率因数的计算,并且通过例题来帮助读者学习和掌握,另外还要学习串联、并联谐振,最后讨论波形分析。

最近,随着电源电子技术的广泛应用,含有高次谐波的波形也多起来了,所以希望读者通过本章的学习,牢牢掌握其基础知识。

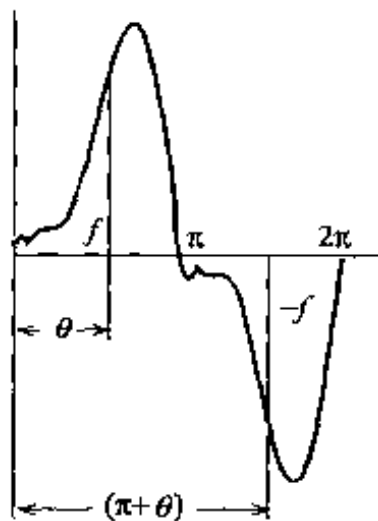


图 6.1 对称波示例

6.1 傅里叶级数(或傅里叶展开)

把非正弦波的交流波形称为失真波(distorted wave),以一定的周期 $T=1/f=2\pi/\omega$ (注意函数 $f(t)$ 的频率为 f 。本章不太提及频率 f , 大多情况下,以函数 $f(t)$ 或 $f(\theta)$ 来表示。规律变化的失真交流波,实际上是由无穷多个不同频率的正弦波叠加而成的,如下式所示,它可以展开为直流项、正弦项及余弦项的级数之和,由函数 $f(t)$ 表示,称此为傅里叶级数(Fourier series)。

$$\begin{aligned}
 f(t) &= A_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \cdots \\
 &\quad + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \cdots \\
 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega t) \quad (6.1)
 \end{aligned}$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \phi_n) \quad (6.2)$$

$$= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(n\omega t + \psi_n) \quad (6.3)$$

其中 $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\phi_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$, $\psi_n = \tan^{-1}(a_n/b_n)$

上式中, A_0 称为直流分量, $A_1 \cos(\omega t - \phi_1)$, $A_1 \sin(\omega t + \psi_1)$ 称为与失真波同频率的基波(fundamental wave), 其他的各项都称为高次谐波(higher harmonics)。另外, 把 n 倍于基波频率的项叫做第 n 次谐波。下面讨论计算直流分量 A_0 , 基波及各高次谐波的振幅 a_n , b_n 的方法。

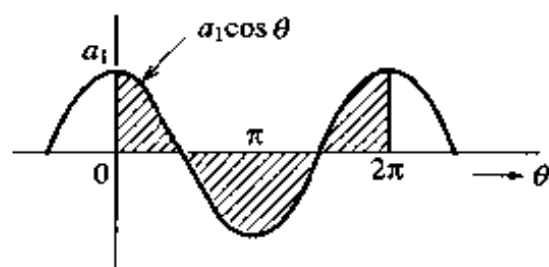
● 6.1.1 直流分量的确定

设 $\omega t = \theta$, 并以 λ 代替 n , 式(6.1)可转换为

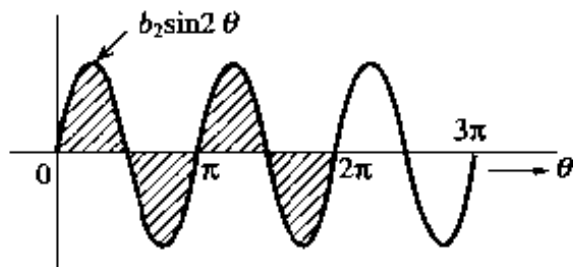
$$f(\theta) = A_0 + \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{\lambda} \cos(\lambda\theta) + \sum_{\lambda=1}^{\infty} b_{\lambda} \sin(\lambda\theta) \quad (6.4)$$

在 0 至 2π 之间对 θ 进行积分, 可得

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} A_0 d\theta + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_{\lambda} \cos(\lambda\theta) d\theta + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_{\lambda} \sin(\lambda\theta) d\theta \quad (6.5)$$



(a) $a_1 \cos \theta$ 在 $0 \sim 2\pi$ 间的积分值与图中阴影部分面积相等代数和为 0



(b) $b_2 \sin 2\theta$ 在 $0 \sim 2\pi$ 间的积分值等于图中阴影部分面积代数和为 0

图 6.2 一个周期(或整数倍周期)内的积分

上式中, 右边第一项为 $2\pi A_0$, 第 2 项、3 项分别等于正弦波、余弦波在一个周期(或整数倍周期)内的面积, 故其值为 0。从图中看更为明显。图

6.2(a)表示式(6.5)中第2项 $\lambda=1$ 时的波形,6.2(b)表示第3项 $\lambda=2$ 时的波形。图中的斜线部分相当于它们在 $0\sim 2\pi$ 间的积分。从图中可知,积分为0,对任意一个整数 λ ,结果都相同(即为0)。也就是说,失真波在一个周期内的积分除以 2π 后等于 A_0 ,即

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta \quad (6.6)$$

● 6.1.2 a_n 的确定

令 n 为任意整数,给式(6.4)乘以 $\cos(n\theta)$,然后在 $0\sim 2\pi$ 之间对 θ 积分,则

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} A_0 \cos(n\theta) d\theta + \sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} a_{\lambda} \cos(\lambda\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta \\ &+ \sum_{\lambda=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} b_{\lambda} \sin(\lambda\theta) d\theta \cdot \cos(n\theta) d\theta \end{aligned} \quad (6.7)$$

由上面的讨论可知右边第一项

$$\int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

的值为0,第三项

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} b_{\lambda} \sin(\lambda\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta \\ &= (-b_{\lambda}/2) \cdot [\cos(\lambda+n)\theta/(\lambda+n) + \cos(\lambda-n)\theta/(\lambda-n)]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

当 $n \neq \lambda$ 时余弦波在 $0\sim 2\pi$ 之间一个周期内的积分为0,当 $n=\lambda$ 时

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \sin(\lambda\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sin(n\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta = 1/2 [-1/4 \cdot \cos 2n\theta]_0^{2\pi} = 0 \end{aligned}$$

即式(6.7)中,无论 n 与 λ 取何值右边第1项与第3项都为0,而第2项为

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} a_{\lambda} \cos(\lambda\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta \\ &= (a_{\lambda}/2) [\sin(\lambda+n)\theta/(\lambda+n) + \sin(\lambda-n)\theta/(\lambda-n)]_0^{2\pi} \end{aligned}$$

上式中当 $n \neq \lambda$ 时,第二项为0, $n=\lambda$ 时,第二项为

$$\int_0^{2\pi} a_{\lambda} \cos(\lambda\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} a_n \cos(n\theta) \cdot \cos(n\theta) d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} a_n (\cos(n\theta))^2 d\theta = \left[\theta/2 + 1/(4n) \cdot \sin(2n\theta) \right]_0^{2\pi} = \pi a_n
\end{aligned}$$

因此,可知

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (6.8)$$

● 6.1.3 b_n 的确定

给(6.4)式乘以 $\sin(n\theta)$, 然后在 $0 \sim 2\pi$ 之间对 θ 积分。除 $n=n$ 之外, 右边的积分均为 0, 因此可得

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (6.9)$$

(详细计算与式(6.8)相同, 故在此略去。)

在 $f(t)$ 给出了作为对象的波形时, 如果从式(6.6)、式(6.8)、式(6.9)计算出 A_0 、 a_n 、 b_n 的值, 那么失真波的表达式可由式(6.1)、式(6.2)的级数来表示。如果对 t 积分, 那么 A_0 、 a_n 、 b_n 的表达式为

$$\left. \begin{aligned}
A_0 &= \frac{1}{T} \int_0^T f(\omega t) dt \\
a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) \cdot \cos(n\omega t) dt \\
b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(\omega t) \cdot \sin(n\omega t) dt
\end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

即周期性变化的失真波都可表示为直流、基波与高次谐波的合成。

6.2 典型的失真波形

如果失真交流波形具有某些特征, 那么展开成级数后的 A_0 、 a_n 、 b_n 、 A_n 、 ϕ_n 、 ψ_n 等系数必须符合某些条件。下面举例说明。

● 6.2.1 无直流项的情况

如图 6.1 所示, 当一个周期内正负半波的平均值为 0 时, $A_0 = 0$, 无直流项(见 6.1.1 节“直流分量的确定”)。

● 6.2.2 对称波

如图 6.1 所示,正半波形与负半波形完全相同,即每个 π 或 $T/2 = \pi/\omega$ [s], $f(\theta)$ 的绝对值相等、符号相反的波形称对称波。因为波形的正侧与负侧相等,故直流项 A_0 为 0。 $\omega t = 0$ 时,对称波的条件是 $f(\theta + \pi) = -f(\theta)$,而

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \\ f(\theta + \pi) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n(\theta + \pi)) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n(\theta + \pi)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n (-1)^n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-1)^n \sin(n\theta) \quad (6.11) \end{aligned}$$

因此,要使 $f(\theta + \pi)$ 恒等于 $-f(\theta)$,则 n 必须为奇数。换句话说,若 n 为偶数,则 a_n 、 b_n 都必须为 0。另外,当 n 为奇数时下面两式成立:

$$\begin{aligned} f(\theta + \pi) \cdot \cos(n(\pi + \theta)) &= -f(\theta) \cdot (-\cos(n\theta)) = f(\theta) \cdot \cos(n\theta) \\ f(\theta + \pi) \cdot \sin(n(\pi + \theta)) &= -f(\theta) \cdot (-\sin(n\theta)) = f(\theta) \cdot \sin(n\theta) \end{aligned} \quad (6.12)$$

从式(6.8)可知

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta + \frac{1}{\pi} \int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \end{aligned}$$

把式(6.12)代入上式第二项,可得

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (n \text{ 为奇数}) \quad (6.13)$$

同样,求 b_n 时,从 $0 \sim 2\pi$ 进行积分,再乘以 2 倍,可得式

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \quad (n \text{ 为奇数}) \quad (6.14)$$

由此可知,对称波可表示为奇次的正弦项和余弦项之和,或含有初相位 ϕ_n 的奇次的余弦级数如下式所示:

$$\begin{aligned} f(t) &= a_1 \cos(\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + a_5 \cos(5\omega t) + \cdots \\ &\quad + b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + b_5 \sin(5\omega t) + \cdots \\ &= A_1 \cos(\omega t - \phi_1) + A_3 \cos(3\omega t - \phi_3) + \cdots \end{aligned} \quad (6.15)$$

$$\phi_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$$

● 6.2.3 奇函数波

以与 x 轴的交点为对称点、正负半波左右对称的波形称为奇函数波。图 6.3 所示的波形,是关于横轴上的 π 点对称,由其对称性,可知下式成立:

$$f(2\pi - \theta) = -f(\theta)$$

或

$$f(-\theta) = -f(\theta)$$

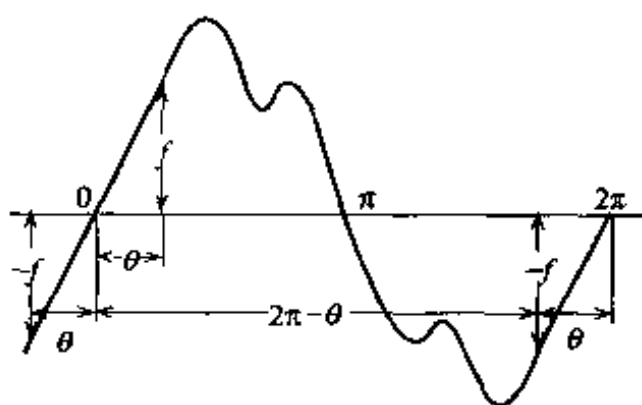


图 6.3 与 x 轴交点为对称点的波形(奇函数波)

因为对 π 点对称,所以以 π 点为对称点,将上半部分的波形或下半部分的波形旋转 180° 后,波形会重合,即一个周期的正负波形相同。因此,一个周期内函数的积分为 0,直流项 A_0 等于 0,下面两式成立:

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \\ f(2\pi - \theta) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n(2\pi - \theta)) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n(2\pi - \theta)) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-\sin(n\theta)) \end{aligned} \quad (6.16)$$

要满足 $f(2\pi - \theta) = -f(\theta)$, 则

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-\sin(n\theta)) \\ = - \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \right) \end{aligned}$$

因此, a_n 的系数都必须为 0。也就是说,级数中只含有正弦项,而无余弦项,即

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n(\omega t) \\
 &= b_1 \sin \omega t + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots
 \end{aligned} \tag{6.17}$$

另外,当给出函数 $f(t)$ 求 b_n 时,由式(6.9)可知

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

因为这里我们讨论的是奇函数波,所以 θ 在 $\pi \sim 2\pi$ 范围内 $f(\theta)$ 及 $\sin(n\theta)$ 的值与 θ 在 $0 \sim \pi$ 间的 $f(\theta)$ 及 $\sin(n\theta)$ 的值大小相等,符号相反。因此,求 b_n 时,只要求出 θ 在 $0 \sim \pi$ 间的积分后乘以 2 倍即可,即

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \tag{6.18}$$

● 6.2.4 以横轴交点为对称点的梯形对称波

如 6.4 图所示,这种波形既满足对称波的条件,也满足奇函数波的条件,因此它表示为不含直流项,仅由奇次谐波的正弦项构成的级数,即

$$f(t) = b_1 \sin(\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots \tag{6.19}$$

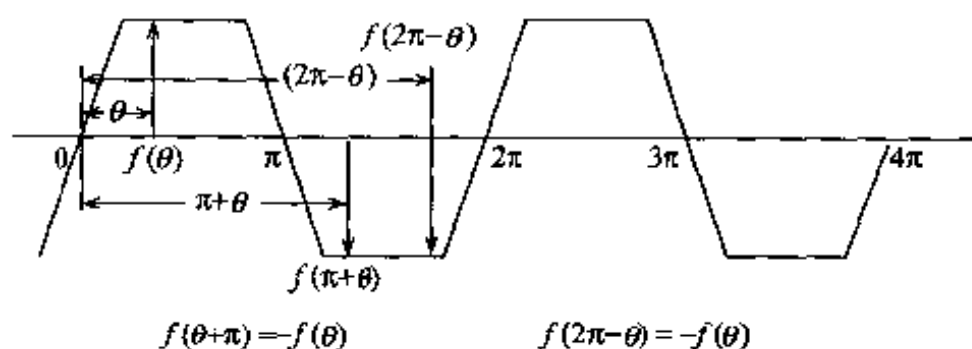


图 6.4 点对称的正负波形

n 为奇数,故

$$\left. \begin{aligned}
 f(\pi + \theta) \cdot \sin n(\pi + \theta) &= -f(\theta) (-\sin(n\theta)) \\
 &= f(\theta) \cdot \sin(n\theta) \\
 f(\pi - \theta) \cdot \sin n(\pi - \theta) &= -f(\theta) \sin(n\theta)
 \end{aligned} \right\} \tag{6.20}$$

因此对 θ 在 $1/4$ 周期内积分,就可求出 b_n 的值,即

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \tag{6.21}$$

由图 6.4 也可以看出, $f(\theta) \sin(n\theta)$ 在 $0 \sim \pi/2$ 区间的积分乘以 4, 其值与 $f(\theta) \sin(n\theta)$ 在 $0 \sim 2\pi$ 一个周期的积分相等。

● 6.2.5 偶函数波

整流波中, 与过零点的纵轴左右对称的波形称为偶函数波(见图 6.5)。

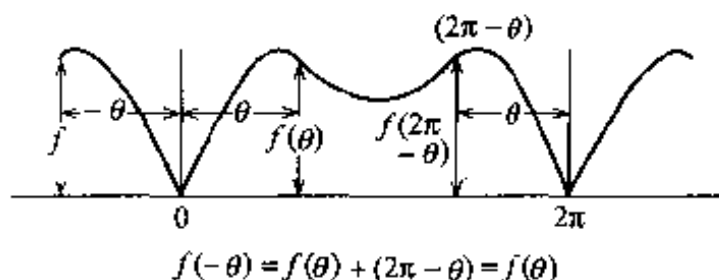


图 6.5 与过零点的纵轴左右对称的整流波(偶函数波)

偶函数波的条件为

$$\left. \begin{aligned}
 f(-\theta) &= f(\theta) \quad \text{或} \quad f(2\pi - \theta) = f(\theta) \\
 f(\theta) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \\
 f(2\pi - \theta) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n(2\pi - \theta) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n(2\pi - \theta) \\
 &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (-\sin(n\theta))
 \end{aligned} \right\} \quad (6.22)$$

因此, 为使 $f(\theta)$ 恒等于 $f(2\pi - \theta)$, 式子中只能保留直流项 A_0 与余弦项, 即级数的形式为

$$\begin{aligned}
 f(\theta) &= A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta) \\
 &= A_0 + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \cdots \quad (6.23)
 \end{aligned}$$

又因为

$$f(2\pi - \theta) \cdot \cos(n(2\pi - \theta)) = f(\theta) \cos(n\theta)$$

故, 由此就可以求出 a_n , 即

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta \quad (6.24)$$

由式(6.6)可知 A_0 为

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta \end{aligned}$$

6.3 特殊波的例子

下面求图 6.6 中所示的、最大值为 I 的傅里叶级数：

- (1) 方波(也称为矩形波)。
- (2) 有 0 区间的方波。
- (3) 半波整流正弦波。
- (4) 全波整流正弦波。

这些都是现实生活中常常出现的波形。图中的横轴表示电气角度 $\theta = \omega t$

6.3.1 方波

图 6.6(a)的方波即为对称波,由于横轴交点为对称点,因此其级数表达式为式(6.19),只由奇次的正弦项构成,即

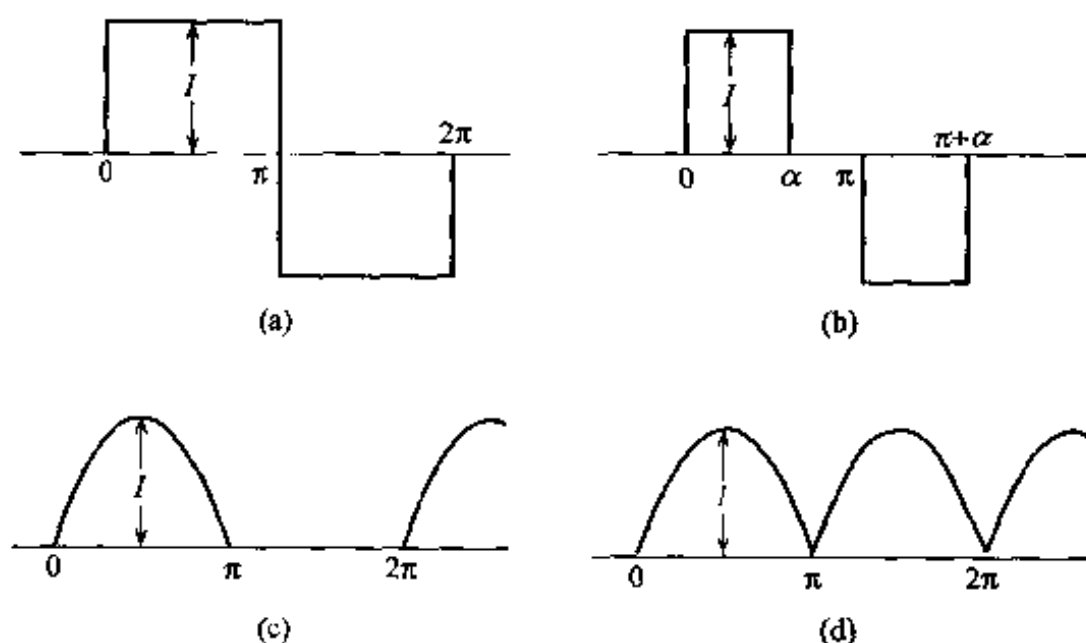


图 6.6 特殊波的傅里叶级数的展开

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\theta) \quad (n \text{ 为奇数})$$

由式(6.21),得

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta$$

而函数 $f(\theta)$ 在 $0 \sim \pi/2$ 间的值为 I , 故

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{4I}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(\theta) \sin(n\theta) d\theta \\ &= (4I/n\pi) [-\cos(n\theta)]_0^{\pi/2} \\ &= 4I/n\pi \quad (n \text{ 为奇数}) \end{aligned}$$

因此

$$f(\theta) = \frac{4I}{\pi} \left(\sin\theta + \frac{1}{3}\sin(3\theta) + \frac{1}{5}\sin(5\theta) + \cdots \right) \quad (6.25)$$

当级数的高次项数增加时,由此式可看出函数 $f(\theta)$ 波形的变化,图 6.7 表示了这种变化。由图中可看出,谐波项数越多,合成曲线越接近方波。图 6.7 是从 1~51 的 26 个奇次谐波的合成图。

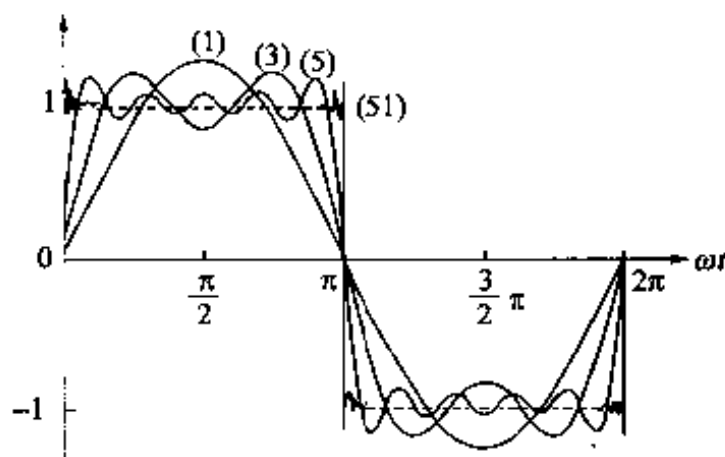


图 6.7 n 为 1~51 的奇次谐波的合成图——图中只画出了 1、3、5 次谐波

● 6.3.2 有 0 区间的方波

图 6.6(b) 为有 0 区间的方波,此波形属于第 2 节中的对称波,故展开式中无直流项,即方波函数的展开式仅由奇数次正弦项、余弦项构成。为表示奇数,现引入 m (整数),由式(6.15)可知

$$A_0 = 0, \quad a_{2m} = 0, \quad b_{2m} = 0$$

奇数项的系数为

$$\begin{aligned} a_{2m-1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi I \cos(2m-1)\theta d\theta \\ &= (2I/\pi) [\sin(2m-1)\theta/(2m-1)]_0^\pi \end{aligned}$$

函数 $f(\theta)$ 在 $0 \sim \alpha$ 区间的值都为 I , 因此 θ 的积分积到 α 即可。故

$$a_{2m-1} = (2/\pi) I \sin(2m-1)\alpha/(2m-1) \quad (6.26)$$

同理

$$\begin{aligned} b_{2m-1} &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi I \sin(2m-1)\theta d\theta \\ &= \frac{2I}{\pi} [-\cos(2m-1)\theta/(2m-1)]_0^\pi \\ &= (2/\pi) I [(1 - \cos(2m-1)\alpha)/(2m-1)] \end{aligned} \quad (6.27)$$

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m-1} \cos(2m-1)\theta + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1} \sin(2m-1)\theta \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (2I/(2m-1)\pi) [\sin(2m-1)\alpha \cdot \cos(2m-1)\theta \\ &\quad + (1 - \cos(2m-1)\alpha) \cdot \sin(2m-1)\theta] \end{aligned} \quad (6.28)$$

整理式(6.28)中的 $[\quad]$ 内各项, 得

$$A \cos \gamma + B \sin \gamma = \sqrt{A^2 + B^2} (\cos(\gamma - \phi))$$

其中, $\phi = \tan^{-1}(B/A)$

上式以 $A = \sin(2m-1)\alpha$, $B = (1 - \cos(2m-1)\alpha)$, $\gamma = (2m-1)\theta$, $\phi = \tan^{-1}(B/A) = \phi_{2m-1} = \tan^{-1}(b_{2m-1}/a_{2m-1})$ 可得到

$$\begin{aligned} \sqrt{A^2 + B^2} &= \{(\sin(2m-1)\alpha)^2 + (1 - \cos(2m-1)\alpha)^2\}^{1/2} \\ &= \{1 + 1 - 2\cos(2m-1)\alpha\}^{1/2} = \{2(1 - \cos(2m-1)\alpha)\}^{1/2} \end{aligned}$$

故式(6.28)可改写为

$$f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2I}{(2m-1)\pi} \sqrt{2} \sqrt{1 - \cos(2m-1)\alpha} \cdot \cos((2m-1)\theta - \phi_{2m-1})$$

令 $\beta = (2m-1)\alpha/2$, 由倍角公式 $(\sin\beta)^2 = (1 - \cos 2\beta)/2$ 可知

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} 2I/((2m-1)\pi) \cdot \sqrt{2} \sqrt{2} \sin((2m-1)\alpha/2) \cdot \\ &\quad \cos((2m-1)\theta - \phi_{2m-1}) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} 4I/((2m-1)\pi) \cdot \sin((2m-1)\alpha/2) \cdot \end{aligned}$$

$$\cos((2m-1)\theta - \phi_{2m-1}) \quad (6.29)$$

求得 ϕ_{2m-1} 为

$$\begin{aligned} \tan \phi_{2m-1} &= \frac{B}{A} = \frac{1 - \cos(2m-1)\alpha}{\sin(2m-1)\alpha} \\ &= 2 \left\{ \sin\left(\frac{2m-1}{2}\alpha\right) \right\}^2 / 2 \sin \frac{(2m-1)\alpha}{2} \cdot \cos \frac{(2m-1)\alpha}{2} \\ &= \sin \frac{(2m-1)\alpha}{2} / \cos \frac{(2m-1)\alpha}{2} = \tan\left(\frac{(2m-1)\alpha}{2}\right) \\ \phi_{2m-1} &= \frac{(2m-1)\alpha}{2} \end{aligned}$$

将此代入式(6.29), 经整理可得

$$f(\theta) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4I}{(2m-1)\pi} \cdot \sin\left(\frac{(2m-1)\alpha}{2}\right) \cos\left\{(2m-1)\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)\right\} \quad (6.29a)$$

若 $\alpha = \pi$, 则波形与图 6.6(a) 相同。下面将 $\alpha = \pi$ 代入式(6.29a), 检验式(6.29a)与式(6.25)是否相同。 $\cos\{(2m-1)(\theta - \alpha/2)\}$ 可分解为

$$\cos(2m-1)\theta \cdot \cos \frac{(2m-1)\alpha}{2} + \sin(2m-1)\theta \cdot \sin \frac{(2m-1)\alpha}{2} \quad (6.29b)$$

式(6.29b)中, 若 $\alpha = \pi$, 则 $\cos \frac{(2m-1)}{2}\pi$ 为 0, 将此式代入式(6.29a)整理后, 可得

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4I}{(2m-1)\pi} \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi}{2} \cdot \sin(2m-1)\theta \cdot \sin \frac{(2m-1)\pi}{2} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4I}{(2m-1)\pi} \left\{ \sin \frac{2m-1}{2} \cdot \pi \right\}^2 \cdot \sin(2m-1)\theta \end{aligned}$$

因 $\sin \frac{(2m-1)}{2}\pi$ 等于 1 或 -1, 所以上式为

$$f(\theta) = \frac{4I}{(2m-1)\pi} \cdot \frac{1}{\pi} \{\sin(2m-1)\theta\}$$

由此可知, 它与式(6.25)相同。

● 6.3.3 半波整流波

如图 6.6(c) 所示, 这种波形在半个周期内为正弦波, 另外半周期为 0。

由定义可求出 A_0 、 a_n 、 b_n 的值。

$$\begin{aligned} (1) \quad A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I \sin \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} I \sin \theta d\theta + \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{2\pi} 0 d\theta \\ &= \frac{I}{2\pi} [-\cos \theta]_0^{\pi} = \frac{I}{\pi} \end{aligned} \quad (6.30)$$

$$\begin{aligned} (2) \quad a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I \sin \theta \cos(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I \sin \theta \cos(n\theta) d\theta \\ &\quad - \frac{I}{\pi} [-\cos(1+n)\theta/(2(1+n)) - \cos(1-n)\theta/(2(1-n))]_0^{\pi} \end{aligned}$$

当 $n=3, 5, \dots$ (大于 3 的奇数) 时 $a_n=0$

当 $n=2, 4, \dots$ (偶数) 时 $a_n = (-2)/\pi \cdot I/(n^2 - 1)$

当 $n=1$ 时

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I \sin(2\theta)/2(d\theta) \\ &= \frac{I}{2\pi} [-\cos(2\theta)/4]_0^{\pi} = 0 \end{aligned} \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} (3) \quad b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I \sin \theta \sin(n\theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I \sin \theta \sin(n\theta) d\theta \\ &= \frac{I}{\pi} [-\sin(1+n)\theta/(2(1+n)) + \sin(1-n)\theta/(2(1-n))]_0^{\pi} \end{aligned}$$

$n \neq 1$ (即 2 以上时) $b_n=0$

当 $n=1$ 时

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I \sin \theta \sin \theta d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} I [1/2 \cdot (\cos 2\theta - 1)] d\theta \\ &= I/\pi [\theta/2 - 1/4 \cdot \sin(2\theta)]_0^{\pi} = I/2 \end{aligned} \quad (6.32)$$

由式(6.30)、式(6.31)、式(6.32), 可知

$$\begin{aligned} f(\theta) &= I \{1/\pi + (1/2) \cdot \sin \theta - \sum_{n=1}^{\infty} (2/\pi(4n^2 - 1)) \cdot \cos 2n\theta\} \\ (n=1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (6.33)$$

● 6.3.4 全波整流正弦波

图 6.6(d) 的波形与上节的偶函数波相同, 因此

$$f(\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\theta)$$

若 θ 为 $0 \sim \pi$ 之间, 则 $f(\theta) = I \sin \theta$

若 θ 为 $\pi \sim 2\pi$ 之间, 则 $f(\theta) = -I \sin \theta$

因此

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) d\theta \cdot 2 \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} I \sin \theta d\theta = \frac{I}{\pi} [-\cos \theta]_0^{\pi} = \frac{2}{\pi} \cdot I \end{aligned}$$

另外, 由式(6.24), 得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\theta) \cos(n\theta) d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} I \sin \theta \cos(n\theta) d\theta \\ &= \frac{I}{\pi} \int_0^{\pi} [\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta] d\theta \\ &= I/\pi [-\cos(n+1)\theta/(n+1) + \cos(n-1)\theta/(n-1)]_0^{\pi} \\ &= I/\pi [(1 - (-1)^{(n+1)})/(n+1) - (1 - (-1)^{(n-1)})/(n-1)] \end{aligned} \quad (6.34)$$

当 n 为 3 以上的奇数时, 很明显 $a_n = 0$ 。将 $n=1$ 代入上式计算可得

$$a_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} I \sin \theta \cos \theta d\theta = 2/\pi [-1/4 \cdot \cos 2\theta]_0^{\pi} = 0$$

当 n 为偶数时

$$a_n = 2I/\pi (1/(n+1) - 1/(n-1)) = -4I/(\pi(n^2 - 1))$$

由此可得

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2I/\pi (1 - 2\cos(2\theta)/1 \cdot 3 - 2\cos(4\theta)/3 \cdot 5 \\ &\quad - 2\cos(6\theta)/5 \cdot 7 - \dots) \end{aligned} \quad (6.35)$$

6.4 失真波的有效值、功率及功率因数和失真率

6.4.1 失真波的有效值

下面讨论失真波的有效值、功率、功率因数等的计算。

电流的瞬时值的表达式为

$$i = I_0 + I_{1m} \cos(\theta + \phi_1) + I_{2m} \cos(2\theta + \phi_2) + \dots \quad (6.36)$$

根据有效值的定义可知

$$\begin{aligned}
 I &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i^2 d\theta} \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{I_0 + I_{1m} \cos(\theta + \phi_1) + I_{2m} \cos(2\theta + \phi_2) + \dots\}^2 d\theta}
 \end{aligned}
 \quad (6.37)$$

上式右边的括号内的平方展开时包含下列四项：(1) I_0^2 项；(2) 各余弦波的平方项；(3) I_0 与余弦波的乘积项；(4) 不同频率的余弦波的乘积项

下面对这四项分别求积分。

(1) I_0^2 项

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0^2 d\theta = I_0^2$$

(2) 各余弦波的平方项

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{1m}^2 \cos^2(\theta + \phi_1) d\theta \\
 &= \frac{I_{1m}^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{(1/2)\cos 2(\theta + \phi_1) + 1\} d\theta \\
 &= I_{1m}^2 / (2\pi) [\{1/2(\theta + 1/2\sin 2(\theta + \phi_1))\}]_0^{2\pi} = I_{1m}^2 / 2 = I_1^2
 \end{aligned}$$

(3) I_0 与余弦波的乘积项

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_0 I_{nm} \cos(n\theta + \phi_n) d\theta = \frac{I_0 I_{nm}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(n\theta + \phi_n) d\theta = 0$$

(4) 不同频率的余弦波的乘积项

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} I_{nm} \cos(n\theta + \phi_n) I_{pm} \cos(p\theta + \phi_p) d\theta \\
 &= \frac{I_{nm} I_{pm}}{4\pi} \int_0^{2\pi} [\cos\{(n-p)\theta + \phi_n - \phi_p\} \\
 &\quad + \cos\{(n+p)\theta + \phi_n + \phi_p\}] d\theta = 0
 \end{aligned}
 \quad (6.38)$$

因此

$$I = \sqrt{I_0^2 + I_1^2 + I_2^2 + \dots} \quad (6.39)$$

也就是说，失真电流的有效值等于直流项、基波项、高次谐波项电流有效值的平方和的平方根。

● 6.4.2 失真波的功率

令 $\omega t = 0$ ，则失真电压及电流的表达式为

$$\left. \begin{aligned} v &= \sum_{n=1}^{\infty} V_{nm} \cos(n\theta + \phi_n) \\ i &= \sum_{n=1}^{\infty} I_{nm} \cos(n\theta + \alpha_n) \end{aligned} \right\} \quad (6.40)$$

功率的瞬时值 p 为

$$\begin{aligned} p = vi &= \sum_{n=1}^{\infty} [V_{nm} \cos(n\theta + \phi_n) \cdot I_{nm} \cos(n\theta + \alpha_n)] \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} [V_{nm} \cos(n\theta + \phi_n) \cdot I_{qm} \cos(q\theta + \alpha_q)] \end{aligned} \quad (6.41)$$

式中 $n \neq q$ 。

式(6.41)右边第一组是同次谐波的电压、电流乘积的集合,第二组是不同次谐波的电压与电流乘积的集合。计算平均功率时,必须对上式各项求 θ 在 $0 \sim 2\pi$ 间的积分。而由式(6.38)可知,第二组各项的积分均为 0。第一组各项的平均值为

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} V_{pm} I_{pm} \cos(p\theta + \phi_p) \cdot \cos(p\theta + \alpha_p) d\theta \\ &= \frac{V_{pm} I_{pm}}{4\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \{ \cos(\phi_p - \alpha_p) + \cos(2p\theta + \phi_p + \alpha_p) \} d\theta \\ &= \frac{V_{pm} I_{pm}}{4\pi} \sum_{p=1}^{\infty} [\cos(\phi_p - \alpha_p)] [\theta]_0^{2\pi} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (V_{pm} I_{pm} / 2) \cos\phi_p = \sum_{p=1}^{\infty} V_p I_p \cos\phi_p \end{aligned} \quad (6.42)$$

式中 $\cos(2p\theta + \phi_p + \alpha_p)$ 在 $0 \sim 2\pi$ 之间的积分为 0, $\phi_p = \phi_p - \alpha_p$ 为 P 次谐波电压与电流的相位差。因

$$V_p = V_{pm} / \sqrt{2}, \quad I_p = I_{pm} / \sqrt{2}$$

所以失真波的平均功率等于 v 及 i 中同次谐波的电压与电流之间产生的平均功率值之和,不同次谐波的电压与电流不会产生平均功率。平均功率 P 为

$$P = \sum_{p=1}^{\infty} V_p I_p \cos\phi_p \quad (6.43)$$

一般情况下 $V_p = Z_p \cdot I_p$, $\cos\phi_p = R/Z_p$ (Z_p 是 p 次谐波电流对应的阻抗),故

$$P = \sum_{p=1}^{\infty} V_p I_p \cos\phi_p = \sum_{p=1}^{\infty} (Z_p \cdot I_p) I_p \cos\phi_p$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{p=1}^{\infty} (Z_p \cdot I_p) I_p (R/Z_p) = \sum_{p=1}^{\infty} I_p^2 R \\
&= R \cdot (I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + \dots) = R (\text{失真波电流有效值})^2
\end{aligned}
\tag{6.44}$$

即电阻 R 消耗的功率为电流有效值的平方与 R 之积, 它与电流的波形无关。有效值的定义也可以说明这点。

● 6.4.3 失真波的功率因数

失真波的视在功率为电压有效值与电流有效值的乘积, 功率因数的定义为有功功率与视在功率之比。所以

$$\text{失真波的功率因数} = \text{有功功率} / \text{视在功率} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos \phi_n \right) / VI \tag{6.45}$$

V 、 I 分别为失真电压与电流的有效值。

图 6.8 表示的是正弦电压与含有三次谐波的电流的波形, 这种情况下, 人们容易认为因电压与电流同时都为 0, 所以相位相同, 其功率因数是 100%。其实, 这是错误的理解, 理由如下:

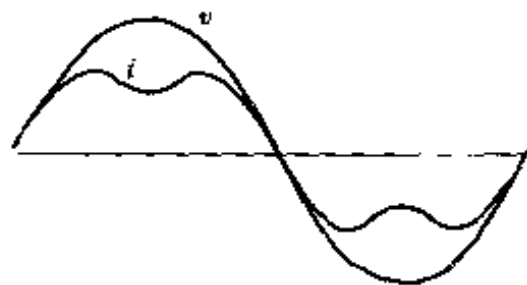


图 6.8 正弦电压与含三次谐波电流构成的失真波的功率因数

图 6.8 中, 设

$$v = V_m \sin \omega t,$$

$$i = I_m \sin \omega t + I_{3m} \sin 3\omega t$$

则

$$\text{平均功率 } P = (V_m / \sqrt{2}) \cdot (I_{1m} / \sqrt{2})$$

电压的有效值 $V = V_m / \sqrt{2}$, 电流的有效值为

$$I = \sqrt{\left(\frac{I_{1m}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{I_{3m}}{\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(I_{1m})^2 + (I_{3m})^2}$$

$$\text{视在功率 } VI = \frac{V_m}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(I_{1m})^2 + (I_{3m})^2}$$

$$\text{所以, 功率因数 } P \text{ 或 } VI = \frac{(V_m) \cdot (I_{1m}) / 2}{(V_m / 2) \sqrt{(I_{1m})^2 + (I_{3m})^2}} = \frac{I_{1m}}{\sqrt{(I_{1m})^2 + (I_{3m})^2}} < 1$$

因此, 当电压或电流的一方或双方都为失真波时, 即使电压与电流在同一瞬时均为 0, 其功率因数也不是 100%。

【例 6.1】 给 10Ω 的电阻和自感为 10mH 的线圈加上失真电压

$v=100\sin(2\pi\times 50t)+25\sin(2\pi\times 150t)$ [V] 时, 求消耗功率及功率因数。

解 电压频率为 50 Hz 时线圈的电抗与阻抗分别为

$$X_1 = 2 \times 3.14 \times 50 \times 0.01 = 3.14 \Omega$$

$$Z_1 = \sqrt{10^2 + (3.14)^2} = 10.48 \Omega$$

电压频率为 150 Hz 时:

$$X_3 = X_1 \times 3 = 3.14 \times 3 = 9.42 \Omega$$

$$Z_3 = \sqrt{10^2 + (9.42)^2} = 13.74 \Omega$$

先分别求各谐波的电流, 然后求和, 就可知通过线圈的总电流。具体计算如下:

$$\begin{aligned} i &= (100/10.48) \cdot \sin(2\pi \times 50t - \cos^{-1}(R/Z_1)) \\ &\quad + (25/13.74) \cdot \sin(2\pi \times 150t - \cos^{-1}(R/Z_3)) \\ &= 9.45 \cdot \sin(2\pi \times 50t - \cos^{-1}(10/10.48)) \\ &\quad + 1.82 \cdot \sin(2\pi \times 150t - \cos^{-1}(10/13.74)) \end{aligned} \quad (6.46)$$

由式(6.43), 可知功率为

$$\begin{aligned} P &= V_{1m} \cdot I_{1m}/2 \cdot \cos\phi_1 + V_3 \cdot I_{3m}/2 \cdot \cos\phi_3 \\ &= (100 \times 9.54/2) \cdot (10/10.48) + (25 \times 1.82/2) \cdot (10/13.74) \\ &= 477 \times (10/10.48) + 22.75 \times (10/13.74) = 471.7 \text{ W} \end{aligned} \quad (6.47)$$

电压与电流的有效值为

$$\begin{aligned} V &= \sqrt{\left(\frac{100}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{25}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(100)^2 + (25)^2}{2}} = 72.9 \text{ V} \\ I &= \sqrt{\left(\frac{9.54}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1.82}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{(9.54)^2 + (1.82)^2}{2}} = 6.86 \text{ A} \end{aligned}$$

功率因数 $P/VI = 471.7/(72.9 \times 6.86) = 0.94$

● 6.4.4 等效正弦波

如果正弦波的失真程度比较小, 把这种失真波就称为等效正弦波 (equivalent sine wave)。有些情况下, 可视其为正弦波。等效正弦波是具有与失真波相同的有效值, 频率与基波相同的正弦波。

【例 6.2】 把前面例 6.1 中的失真电压及电流替换为等效正弦波, 那么其最大值为多少?

解 等效正弦电压的最大值 $= \sqrt{2} \times 72.9 = 103 \text{ V}$

等效正弦电流的最大值 $= \sqrt{2} \times 6.86 = 9.70 \text{ A}$

● 6.4.5 失真率、波形率、波高率、波动率

为了表示失真波偏离正弦波的失真程度,引入了失真率(distortion factor)、波形率(form factor)、波高率(crest factor 或 peak factor)等概念。它们定义如下:

失真率 = 高次谐波的有效值/基波的有效值

波形率 = 有效值/平均值

波高率 = 最大值/有效值

波动率是用来描述直流分量中含有交流分量的程度,即直流波形的波动程度,其表达式为:

$$r = \frac{\sqrt{E_1^2 + E_2^2 + E_3^2 + \cdots}}{E_0}$$

如图 6.9 中所示。表 6.1 列举了几种典型波形的有效值、失真率、波形率及波高率。

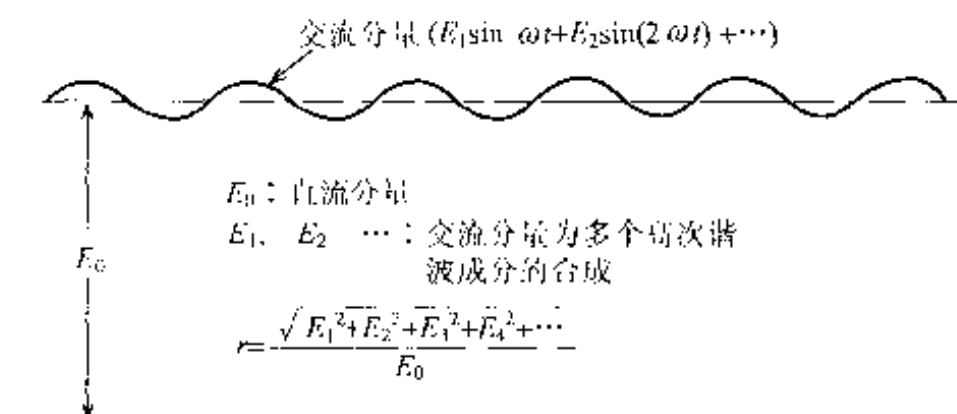
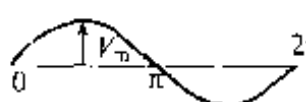
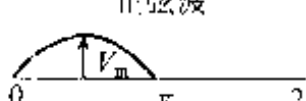
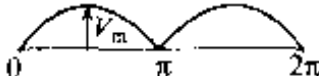
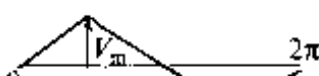
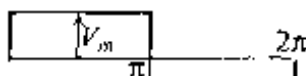


图 6.9 波动率

表 6.1 特殊波的波形率、波高率及失真率

波 形	有效值	失真率	波形率	波高率
 正弦波	$\frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707V_m$	0	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.11$	$\sqrt{2} = 1.414$
 半波整流正弦波	$\frac{V_m}{2} = 0.5V_m$	0.4352	$\frac{\pi}{2} = 1.571$	2

波 形	有效值	失真率	波形率	波高率
 全波整流正弦波	$\frac{V_m}{\sqrt{2}} = 0.707V_m$	0.2273	$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1.111$	$\sqrt{2} = 1.414$
 三角波	$\frac{V_m}{\sqrt{3}} = 0.577V_m$	0.1904	$\frac{2}{\sqrt{3}} = 1.155$	$\sqrt{3} = 1.732$
 方形波	V_m	0.4834	1	1

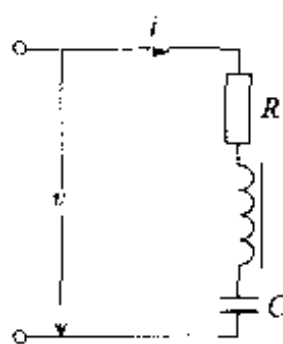
6.4.6 失真交流电路的计算

在只含有电阻的电路中,加上失真电压后,电路电流的波形与电压的波形相同。但是,当电路中含有 L 或 C 时,电流波形与电压波形不同。

对于基波电压,自感 L 的感抗为 ωL ,对于 n 次谐波电压,感抗为 $n\omega L$,因此基波电流的最大值为 $V_{1m}/\omega L$, n 次谐波电流的最大值为 $V_{nm}/n\omega L$ 。所以,在负载为 L 的电路中,高次谐波电流减少,电路中的总电流的波形比外加电压的波形更接近于正弦波。与此相反,在电容性负载的电路中,对于基波电压,静电容量 C 的容抗为 $1/\omega C$,对 n 次谐波,容抗为 $1/n\omega C$,即基波及 n 次谐波电流的最大值分别是 $\omega C V_{1m}$ 、 $n\omega C V_{1m}$ 。因此,含有 C 的电路中,总电流的波形是电压波形中的高次谐波分量逐渐增大后形成的。

1 串联电路

如图 6.10 所示,给 RLC 串联电路加上失真电压



$$v = \sum_{n=1}^{\infty} V_{nm} \cos(n\omega t - \phi_n) \quad (6.48)$$

时,频率 $nf = n(\omega/2\pi)$ 相对应的阻抗为

$$Z_n = R + j(n\omega L - 1/(n\omega C)) \quad (6.49)$$

若电路参数 R 、 L 、 C 不随电流的改变而变化(即为线性电路参数),由叠加定理(见第 5 章 5.2 节)可知,加上失真电压后电路中的电流就等于在各次谐波电压单独作用下产生的电流之和,即

图 6.10 L 、 C 、 R 串联电路
外加失真波电压

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} V_m / Z_n \cos(n\omega t - \phi_n - \psi_n) \quad (6.50)$$

$$Z_n = \sqrt{R^2 + (n\omega L - 1/n\omega C)^2} \quad (6.51)$$

式中,

$$\phi_n = \tan^{-1}(\{n\omega L - 1/(n\omega C)\}/R)$$

如果 L 与 C 满足 $n\omega L = 1/n\omega C$, 即

$$1 - n^2 \omega^2 LC = 0 \quad (6.52)$$

则对 n 次谐波来说, L 、 C 就会发生串联谐振。即使 v 中的 n 次谐波电压较小, 但如果 R 也小, 那么 n 次谐波的电流可能很大。这就是高次谐波谐振。

2 并联电路

在图 6.11 所示的 L 、 C 并联电路中, n 次谐波对应的阻抗为

$$\begin{aligned} Z_n &= R + jn\omega L \cdot \frac{1}{jn\omega C} \left/ jn\omega L + -\frac{1}{jn\omega C} \right. \\ &= R + jn\omega L / (1 - n^2 \omega^2 LC) \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\begin{aligned} |Z_n| &= \sqrt{R^2 + n^2 \omega^2 L^2 / (1 - n^2 \omega^2 LC)^2} \\ \phi_n &= \tan^{-1}(n\omega L / \{R(1 - n^2 \omega^2 LC)\}) \end{aligned} \quad (6.54)$$

若 $1 - n^2 \omega^2 LC = 0$ 成立, 则 n 次谐波的总阻抗为无穷大, 电路中没有 n 次谐波电流。这就是高次谐波的并联谐振。因此, 如图 6.12 所示, 当给左边两端子间加上包含频率 f_1 、 f_2 、 f_3 成分的失真电压时, 在图 6.12(a) 中, 若使 C_1 与 L_1 对 f_1 成分谐振, 则频率为

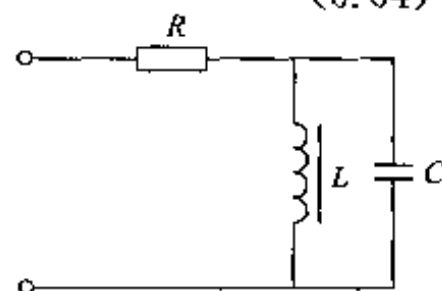


图 6.11 LC 并联后与 R 串联
电路外加失真波电压

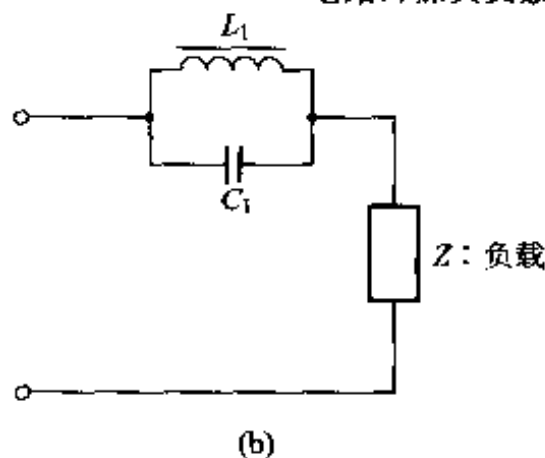
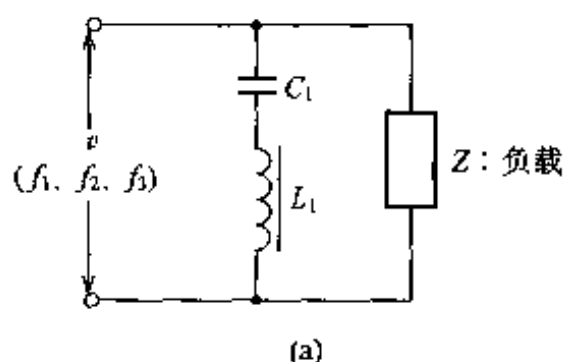


图 6.12 在 L_1 、 C_1 串、并联与负载联接的电路中外加失真波电压

f_1 的电压在 C_1 、 L_1 串联支路上发生短路,而使得右侧负载两端只产生 f_2 、 f_3 的电压。在图 6.12(b)中,若使 C_1 与 L_1 对 f_1 成分谐振,则频率为 f_1 的电流受到阻碍,故无电流通过负载。

6.5 波形分析

式(6.2)或式(6.3)中的 A_0 、 A_1 、 A_2 、 A_3 等表示了各频率谐波振幅的大小。在实际的失真波形中,这些值的计算比较复杂。求出失真波形中含有的各次谐波成分的过程叫作波形分析(wave analysis)或谐波分析(harmonic analysis)。

按照分析的目的,如果计算的是波形的三要素,即频率、振幅和相位,则称为波形分析。如果,只分析高次谐波的种类或振幅则称为谐波分析。

分析方法有两种:通过纪录一个周期内的波形进行分析和直接使用仪器分析。下面举例说明计算各高次谐波振幅的方法。

各高次谐波成分的频谱,X轴表示相对于基波频率的次数(n 次谐波的次数),Y轴表示各谐波的振幅 A_0 、 A_1 、 A_2 、 A_3 等的线状图形称为频谱。因为频谱不仅与 $f(t)$ 函数在时间上表示的波形做了对比,也描述了各频率成分与其次数的关系,所以常常用在失真波形的分析中,图 6.13 所示图形为其中一例。

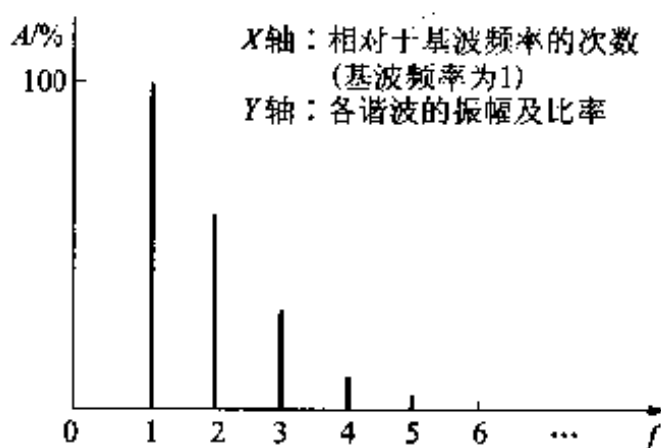


图 6.13 频谱示例

失真波中高次谐波的电压或电流,能引起串联谐振或并列共振,因此需要强调说明。在实际生活中它会造成一些意想不到的危害,所以,谐波分析

具有很大的现实意义。

另外,频谱这个术语不仅用在电气工程中,也用在其他学科上,因此必须根据使用的具体情况,正确理解其内容。

►► 练习题

习题 1

求 $i = 15 + 8\sqrt{2}\sin\omega t + 2\sqrt{2}\sin(3\omega t + \pi/3)$ 的有效值和平均值。

习题 2

给 $R=3\Omega, \omega L=3\Omega$ 串联电路外加一个电压

$$e = 100\sqrt{2}\sin\omega t + 30\sqrt{2}\sin 3\omega t$$

时,求电流瞬时值、电流有效值、有功功率、视在功率及功率因数。

习题 3

LC 并联电路中,当外加电压 $v = V_1\sin\omega t + V_3\sin(3\omega t - \phi)$ 时,求电流表 A_1 、 A_2 、 A_3 的读数(有效值)。

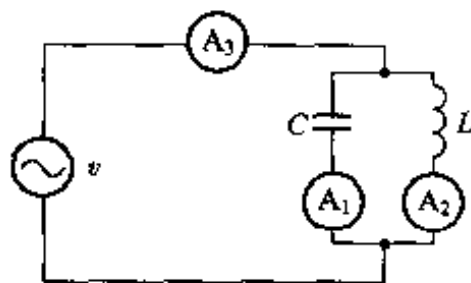


图 6.14

习题 4

在 LRC 串联电路中,若电流为 $i = (I_1/\sqrt{2})\sin\omega t + (I_2/\sqrt{2})\sin(2\omega t + \phi_2)$ 求(1)瞬时电压的表达式;(2)电压的有效值。

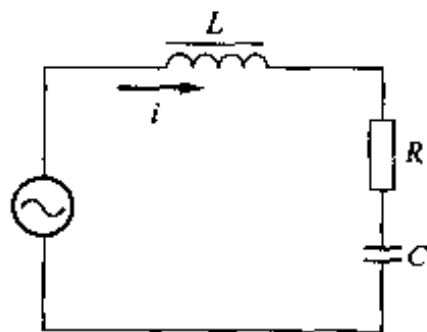


图 6.15

习题 5

求图 6.16 中的傅里叶级数(三角波形)。

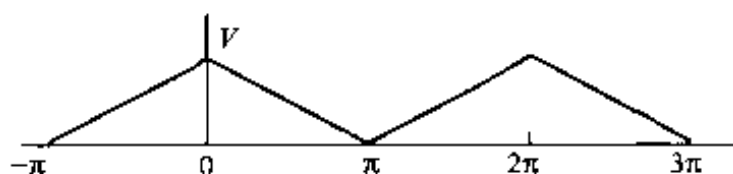


图 6.16

习题 6

求图 6.17 中的全波整流波形的:(1)有效值;(2)高次谐波的次数和高次谐波的成分的大小(有效值),并表示出 2、4、6、8、10 次谐波与有效值的比率[%]。

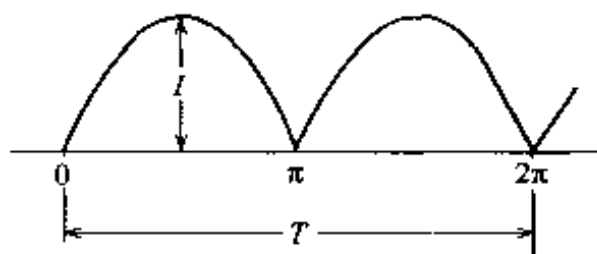


图 6.17

第 7 章 四端子网络

对四端子网络,也许我们较为陌生。其实,生活中常见的变压器就是一个四端子网络,它把从两个端子输入的电压,经过改变后由另两个端子输出。变压器输出的电压通过输电线,输送给家庭和工厂,因此可以说,输电线也是四端子网络。

有些设备制造厂通过使用专用电源运转机器时,为了最大限度的利用电源,常常在电源与机器之间接入一个四端子网络,从而使电源能够给机器提供最大功率。

另外,对于如音响、电视、空调等家用电器以及轿车等产品中常常用到的晶体管,如果把它当作四端子网络,就可测量其特性。

四端子网络有许多参数。本章中介绍了各参数的意义及其计算方法,希望读者学习之后,能够灵活运用这些参数。

7.1 四端子网络的定义

把输入端、输出端各有两个端子共有四个端子的网络,称为四端子网络。

在图 7.1 表示的四端子网络中,左侧为输入端,右侧为输出端,方框里面的部分由 R 、 L 、 C 、 M 构成。无论其内部结构如何复杂,它都当作一个黑盒子来处理。

如图 7.2 所示,通常认为四端子网络的输入端与输出端都带有电源,而且输出端电流也是流入黑盒的。当输出端作为负载时,可认为输出端只有阻抗,没有电源。

四端子网络的外部变量为:输入端的电压 $\dot{V}_1$ 和电流 $\dot{I}_1$,输出端的电压 $\dot{V}_2$ 和电流 $\dot{I}_2$ 。根据它们之间的关系,这四个变量可以组成几种不同形式的方程。

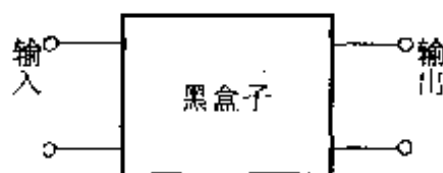


图 7.1 四端子网络

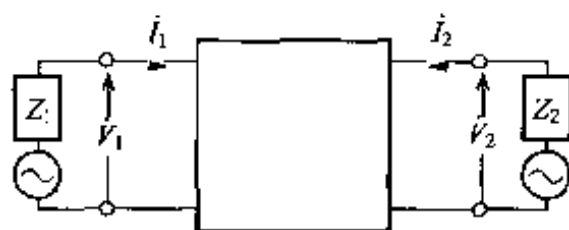


图 7.2 四端子网络的电压、电流

下面以一个最简单的网络——图 7.3 所示的 T 形网络为例，来讨论四个相量之间的关系。

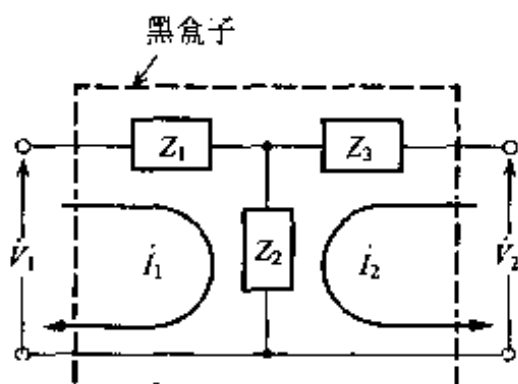


图 7.3 T 形网络

根据基尔霍夫定律，建立 $\dot{I}_1$ 回路与 $\dot{I}_2$ 回路的方程式为

$$\dot{V}_1 = (Z_1 + Z_2)\dot{I}_1 + Z_2\dot{I}_2$$

$$\dot{V}_2 = Z_2\dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3)\dot{I}_2$$

将方程式写为矩阵形式，即

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

这种形式简单明了。

上式中， $\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}$ 称为 **Z 矩阵**。令 Z 矩阵为

$$\begin{bmatrix} Z_1 + Z_2 & Z_2 \\ Z_2 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \quad (7.2)$$

则式(7.1)为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

Z 矩阵中， Z_{11} 、 Z_{12} 、 Z_{21} 、 Z_{22} 、叫做 **Z 参数**。

下面来看，反映在端子上的重要信息——电压与电流。把 $\dot{V}_1$ 、 $\dot{V}_2$ 、 $\dot{I}_1$ 、 $\dot{I}_2$ 放置在式(7.4)中的方框(□)中，则放置的方法有 12 种(把四个元素放在四个位子上，由排列组合原理可知：有 $P_4^4 = 24$ 种。但是，由于上、下交换放置，其结果相同，故共只有 12 种方法)。

$$\begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} = [p] \begin{bmatrix} \square \\ \square \end{bmatrix} \quad (p \text{ 为参数}) \quad (7.4)$$

实际中常常用到的除了 Z 参数之外,还有 Y 参数、 H 参数、 F 参数等。现将这些参数列举如下:

Z 参数

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = [Z] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{描述电压与电流的关系(阻抗参数)}$$

Y 参数

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \quad \text{描述电流与电压的关系(导纳参数)}$$

H 参数

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \quad \text{描述混合电压与电流的关系(混合参数)}$$

F 参数

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \text{描述输入与输出的关系(传输参数)}$$

在下文中我们要详细的讨论这些参数。另外,对于电压、电流、阻抗,分别加上圆点($\cdot$),表示它们为向量。而对于参数,则不加圆点。

7.2 Z 参数

Z 参数表示由基尔霍夫电压定律建立的电路方程式中电压与电流的关系。

图 7.3 的 T 形网络的 Z 常数(前项中)就是通过建立电路方程式来求取的。由(7.2)式可知 Z 常数为

$$Z_{11} = Z_1 + Z_2 \quad Z_{12} = Z_2 \quad Z_{21} = Z_2 \quad Z_{22} = Z_2 + Z_3$$

另外,把端子开路,也可求出 Z 的值。

以方程组的形式表示 Z 常数,式(7.3)可变形为

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_2 & (7.5a) \\ \dot{V}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 + Z_{22} \dot{I}_2 & (7.5b) \end{cases}$$

在式(7.5a)中,令 $\dot{I}_2 = 0$,即将输出端开路,则 $\dot{V}_1 = Z_{11} \dot{I}_1$,由此可得 Z_{11} 为

$$Z_{11} = \dot{V}_1 / \dot{I}_1$$

在图 7.4 所示电路中,当 T 形网络输出端开路时, $\dot{V}_1$ 、 $\dot{I}_1$ 的关系为

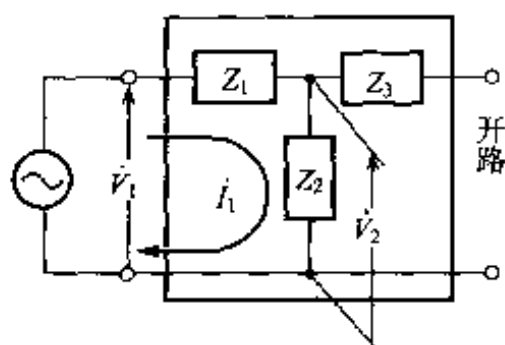


图 7.4 求 Z_{11} 、 Z_{12} (输出端开路)

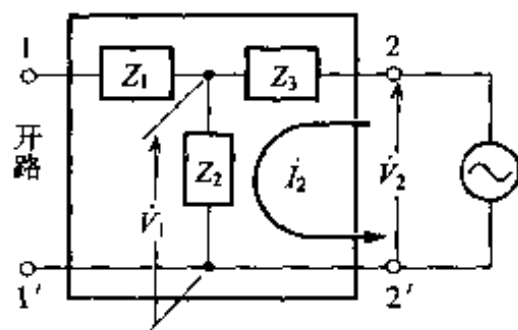


图 7.5 求 Z_{12} 、 Z_{22} (输入端开路)

$$\dot{V}_1 = (Z_1 + Z_2) \dot{I}_1$$

$$\dot{V}_1 / \dot{I}_1 = Z_1 + Z_2 = Z_{11}$$

即 $Z_{11} = Z_1 + Z_2$ 。上面的计算式可表示为

$$Z_{11} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{I}_2=0} = Z_1 + Z_2$$

求 Z_{21} 时,可令式(7.5b)中的 $\dot{I}_2 = 0$,即将输出端开路, Z_{21} 大小为

$$Z_{21} = \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{I}_2=0}$$

在图 7.4 电路中,建立 $\dot{V}_2$ 与 $\dot{I}_1$ 的方程式,因 $\dot{V}_2 = Z_2 \dot{I}_1$,故

$$Z_{21} = \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{I}_2=0} = Z_2$$

用同样的方法,可求出 Z_{12} 的大小,也就是说,令式(7.5a)中的 $\dot{I}_1 = 0$,即如图 7.5 所示,将输入端开路,给输出端 2-2' 加上电压。

$$Z_{12} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0}$$

因输入端电压 $\dot{V}_1$ 等于 Z_2 上的电压降, 即 $\dot{V}_1 = Z_2 \dot{I}_1$, 故

$$Z_{12} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} = Z_2$$

同理可求出 Z_{22} 。

$$Z_{22} = \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} \quad \dot{V}_2 = (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2$$

$$Z_{22} = \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} = Z_2 + Z_3$$

从上面的计算可知, 当知道黑盒中的电路时, 可计算出 Z 参数的值。如果不知道黑盒中的电路, 通过测量输入、输出端的电压与电流, 也可求出参数的大小。

各个参数, 根据其表达的物理意义, 现定义如下:

$$Z_{11} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{I}_2=0} : (\text{输出端开路时的}) \text{输入阻抗} [\Omega]$$

$$Z_{12} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} : (\text{输入端开路时的}) \text{转移阻抗} [\Omega]$$

$$Z_{21} = \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{I}_2=0} : (\text{输出端开路时的}) \text{转移阻抗} [\Omega]$$

$$Z_{22} = \left(\frac{\dot{V}_2}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} : (\text{输入端开路时的}) \text{输出阻抗} [\Omega]$$

式中 $\dot{I}_2=0$ 时, 输出端开路, $\dot{I}_1=0$ 时, 输入端开路。

在不含电源的 R 、 L 、 C 、 M 电路中, $Z_{12} = Z_{21}$ 恒成立。

7.3 Y 参数

Z 参数表示电压与电流的关系, 即 $[\dot{V}] = [Z][\dot{I}]$ 。 Y 参数与此相反, 它表示电流与电压的关系, 即 $[\dot{I}] = [Y][\dot{V}]$ 用方程组可以表示为

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11}\dot{V}_1 + Y_{12}\dot{V}_2 & (7.6a) \\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{V}_1 + Y_{22}\dot{V}_2 & (7.6b) \end{cases}$$

式中, Y_{11} 、 Y_{12} 、 Y_{21} 、 Y_{22} 称为 Y 参数。

下面用 Y 参数表示黑盒中为图 7.6 所示的 π 形网络。

对于 a 点, 由基尔霍夫电流定律有

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 \quad \dot{I}_3 = Y_1\dot{V}_1$$

$$\dot{I}_4 = Y_2(\dot{V}_1 - \dot{V}_2)$$

将 $\dot{I}_3$ 与 $\dot{I}_4$ 式带入 $\dot{I}_1$ 式, 得

$$\dot{I}_1 = (Y_1 + Y_2)\dot{V}_1 - Y_2\dot{V}_2 \quad (7.7)$$

对于 B 点, 同样由基尔霍夫电流定律, 可求出

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_5 - \dot{I}_4 = -Y_2\dot{V}_1 + (Y_2 + Y_3)\dot{V}_2 \quad (7.8)$$

把式(7.7)与式(7.8)写成矩阵形式, 则为

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

Y 矩阵为

$$\begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}$$

因此, 各 Y 参数为

$$Y_{11} = Y_1 + Y_2 \quad Y_{12} = Y_{21} = -Y_2 \quad Y_{22} = Y_2 + Y_3$$

当电路中不含电源时, 对 Z 参数, 有 $Z_{12} = Z_{21}$ 。对 Y 参数, 同样有 $Y_{12} = Y_{21}$ 。

以上, 通过建立与 Y 参数表示的相同形式的方程式, 求出了 Y 参数。

下面, 通过将端子短路的方法来计算 Y 参数。

令(7.6a)式中 $\dot{V}_2 = 0$, 则

$$\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{V}_1 \quad Y_{11} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1} \right)_{\dot{V}_2=0}$$

$\dot{V}_2 = 0$, 表示将输出端短路, 如图 7.7(a)所示, 此时, 图(a)与图(b)为等效电路。图 7.7(b)中 $\dot{V}_1$ 与 $\dot{I}_1$ 的关系为

$$\dot{I}_1 = Y_1 \dot{V}_1 + Y_2 \dot{V}_1 = (Y_1 + Y_2) \dot{V}_1$$

$$Y_{11} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1} \right)_{\dot{V}_2=0} = Y_1 + Y_2$$

同理,从式(7.6b)可求出 Y_{21}

$$Y_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1} \right)_{\dot{V}_2=0}$$

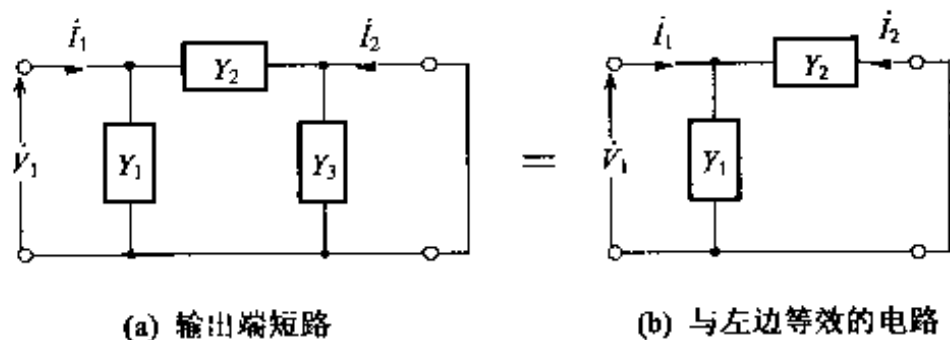


图 7.7 求 Y_{11} 、 Y_{21} (输出端短路)

由图 7.7(b),可知

$$\dot{I}_2 = -Y_2 \dot{V}_1$$

$$Y_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1} \right)_{\dot{V}_2=0} = -Y_2$$

令式(7.6a)中 $\dot{V}_1=0$, 可求出

$$Y_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{V}_1=0}$$

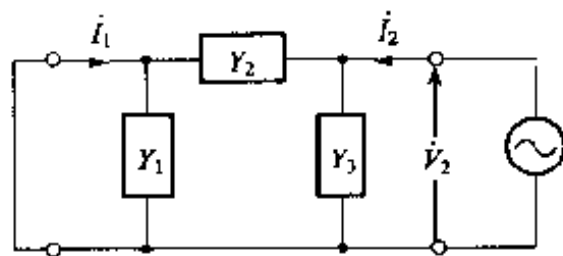


图 7.8 求 Y_{12} 、 Y_{22} (输入端短路)

如图 7.8 所示,令 $\dot{V}_1=0$,即将输入端短路。而且为了求出 $\dot{I}_1$ 与 $\dot{I}_2$ 之间的关系,给输出端加上电压 $\dot{V}_2$,则

$$\dot{I}_1 = -Y_2 \dot{V}_2 \quad Y_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{V}_1=0} = -Y_2$$

同理,从式(7.6b)可求得

$$Y_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{V}_1=0}$$

从图 7.8 可知

$$\dot{I}_2 = (Y_2 + Y_3)\dot{V}_2 \quad Y_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{V}_1=0} = Y_2 + Y_3$$

如上所述,由端子的短路法求出的 Y 参数的值与运用基尔霍夫定律建立电路方程式[如式(7.7)、式(7.8)]求出的值是相同的。

即使不知道黑盒的内部结构,用短路法,分别将输入或输出端短路,测出相关端口的电压、电流,也可以很方便的求出 Y 参数。

各个参数的名称如下:

$$Y_{11} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_1} \right)_{\dot{V}_2=0} : (\text{输出端短路时的}) \text{输入导纳}$$

$$Y_{12} = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{V}_1=0} : (\text{输入端短路时的}) \text{转移导纳}$$

$$Y_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_1} \right)_{\dot{V}_2=0} : (\text{输出端短路时的}) \text{转移导纳}$$

$$Y_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{V}_1=0} : (\text{输入端短路时的}) \text{输出导纳}$$

7.4 h 参数

用矩阵形式表示 h 参数时,左边和右边的变量是电压与电流的混合体,所以取混合(hybrid)的第一个字母来表示,称为 h 参数。

h 参数用来描述晶体管特性时,非常方便。晶体管的一些特性,如电流放大率、电压放大率、输入端阻抗、输出端阻抗等都可由 h 参数直接求出。

而且,根据 H 参数的方程式,可以做出晶体管的等效电路,因此, h 参数也具有便于分析晶体管电路的优点。如图 7.9 所示,晶体管有 3 个电极(B、C、E)。以其中的一个电极如E作为公共端子,那么它可以看作是图

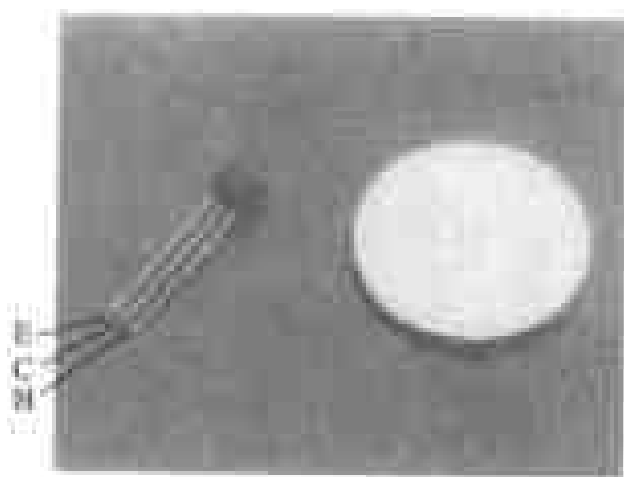


图 7.9 液体管

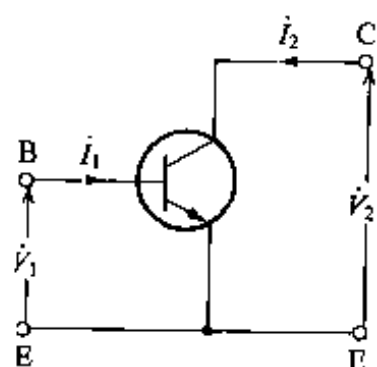


图 7.10 晶体管电路

7.10中所示的四端子。

对于一般的四端子网络,用 h 参数表示的电压与电流的关系如下:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = [h] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix}$$

h 参数包括 h_{11} 、 h_{12} 、 h_{21} 、 h_{22} 四个参数。上面的矩阵可以表示为方程组

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_1 &= h_{11} \dot{I}_1 + h_{12} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 &= h_{21} \dot{I}_1 + h_{22} \dot{V}_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

下面介绍由输入和输出端的电压、电流求 h 参数的方法。在式(7.9)中,令 $\dot{V}_2=0$,即将输出端短路,则

$$h_{11} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{V}_2=0} \quad h_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{V}_2=0}$$

然后,令 $\dot{I}_1=0$,即将输入端开路,并且给输出端加上电压 $\dot{V}_2$,则

$$h_{12} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} \quad h_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_1=0}$$

通过上面的方法,求出的各个 h 参数,其名称如下:

$$h_{11} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{V}_2=0} : (\text{输出端短路时的}) \text{输入阻抗} [\Omega]$$

$$h_{12} = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} : (\text{输入端开路时的}) \text{电压反馈率}$$

$$h_{21} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right)_{\dot{V}_2=0} : (\text{输出端短路时的}) \text{电流放大率}$$

$$h_{22} = \left(\frac{\dot{I}_2}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_1=0} : (\text{输入端开路时的}) \text{输出导纳} [S]$$

对于晶体管来说,一般在低频时用 h 参数,如果把电路只当作一个电阻,那么,就不必考虑电压、电流的方向性,只考虑它们的大小就可以了。

另外,各 H 参数由下角标可以表示为 h_{11} 、 h_{12} 、 h_{21} 、 h_{22} 。但是,对于晶体管,一般取各参数的英文的第一个字母,分别表示为 h_i (input 输入)、 h_r (reverse 反向)、 h_f (forward 正向)、 h_o (output 输出)。

当发射极接地时,另加上 e , 表示为 h_{ie} 、 h_{re} 、 h_{fe} 、 h_{oe} 。

下面讨论晶体管的 h 参数表示的等效电路。由式(7.9)可知输入电压为

$$\dot{V}_1 = h_{11} \dot{I}_1 + h_{12} \dot{V}_2$$

其中 $h_{11} \dot{I}_1$ 为输入阻抗 h_{11} 的电压降,记作 $\dot{V}_{11}$ 。 $h_{12} \dot{V}_2$ 为输入端电压 $\dot{V}_2$ 的倍数,记作 $\dot{V}_{12}$,并用电压源符号来标记,就可作出如图 7.11(a)所示的等效电路。

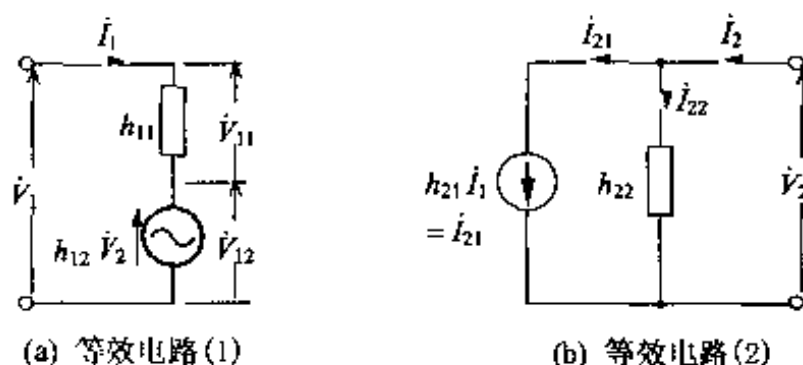


图 7.11 晶体管的等效电路

由式(7.9)可知,输入电流为

$$\dot{I}_2 = h_{21} \dot{I}_1 + h_{22} \dot{V}_2$$

其中 $h_{21} \dot{I}_1$ 是输入电流 $\dot{I}_1$ 的倍数,记为 $\dot{I}_{21}$,并用电流源符号表示; $h_{22} \dot{V}_2$ 是流过导纳 h_{22} 的电流,记为 $\dot{I}_{22}$,等效电路如图 7.11(b)所示。图 7.11(a)与图 7.11(b)叠加后,为图 7.12,此图就是由晶体管的 h 参数表示的等效电路。

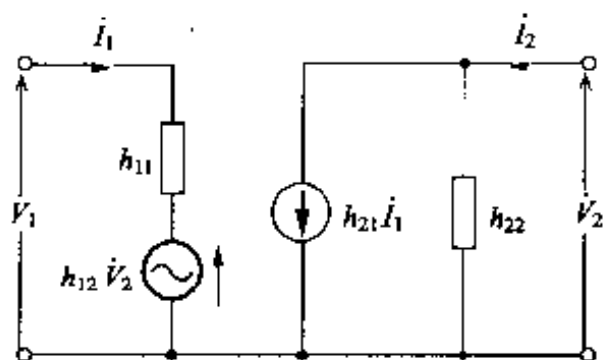


图 7.12 晶体管的 h 参数表示的等效电路

在晶体管的等效电路中, h_{11} 为阻抗, h_{22} 虽然是导纳, 但常常用图 7.12 中所示的电阻的符号来表示。

7.5 F 参数

F 参数表示输入与输出的关系, 因其表述的是最基本的关系, 所以取“基本”(fundamental)的第一个字母, 称为 F 参数。

需特别注意的是, 输出端电流的方向(如图 7.13 所示)是从黑盒中流出的, 这与 Z 、 Y 、 h 参数正好相反。对输电线来说, 若知道输入端的电压、电流, 需求出输出端的电压、电流时最适合用 F 参数计算。用矩阵表示输入与输出的关系为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = [F] \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

A 、 B 、 C 、 D 为 F 参数。上式用方程可表示为

$$\left. \begin{aligned} \dot{V}_1 &= A\dot{V}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 &= C\dot{V}_2 + D\dot{I}_2 \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

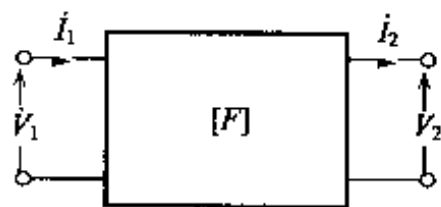


图 7.13 F 参数的四端子网络

下面通过对端子的开路、短路来求 F 参数 A 、 B 、 C 、 D 。在式(7.10)中令 $\dot{I}_2 = 0$, 即将输出端开路可求出 A 、 C 为

$$A = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_2=0} \quad C = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_2=0}$$

再令 $\dot{V}_2=0$, 即将输出端短路可求出 $B、D$ 为

$$B = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{V}_2=0} \quad D = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{V}_2=0}$$

如果黑盒中的电路是由不含电源的 $R、L、C、M$ 构成, 那么 $A、B、C、D$ 之间存在下列关系

$$AD - BC = 1$$

因此, 若知道 F 参数中的任意三个, 其余的一个可由此关系求出。

$AD - BC = 1$ 可通过下列的计算得出。图 7.13 的四端子网络中电压与电流的关系, 可用 Z 参数表示如下(要注意输出端电流的方向):

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = Z_{11} \dot{I}_1 - Z_{12} \dot{I}_2 \\ \dot{V}_2 = Z_{21} \dot{I}_1 - Z_{22} \dot{I}_2 \end{cases}$$

把上式变形, 可求得 F 参数 $A、B、C、D$ 为

$$A = \frac{Z_{11}}{Z_{21}} \quad B = \frac{Z_{11}Z_{22}}{Z_{21}} - Z_{12} \quad C = \frac{1}{Z_{21}} \quad D = \frac{Z_{22}}{Z_{21}}$$

将 $A、B、C、D$ 代入 $AD - BC$, 因为不含电源, 在仅由 $R、L、C、M$ 构成的电路中, 转移阻抗相等($Z_{12} = Z_{21}$), 所以

$$AD - BC = Z_{12}/Z_{21} = 1$$

【例 7.1】 求图 7.14 所示的 T 形电网络中的 F 参数。

解 求 $A、C$ 时, 可令式(7.10)中的 $\dot{I}_2=0$, 即如图 7.15 所示, 将输出端开路, 则

$$A = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_2=0} \quad \dot{V}_2 = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \dot{V}_1$$

由 $A = \dot{V}_1 / \dot{V}_2 = (Z_1 + Z_2) / Z_2$

$$C = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_2=0}, \quad \dot{V}_2 = Z_2 \dot{I}_1$$

可知 $C = \dot{I}_1 / \dot{V}_2 = 1 / Z_2$ 。

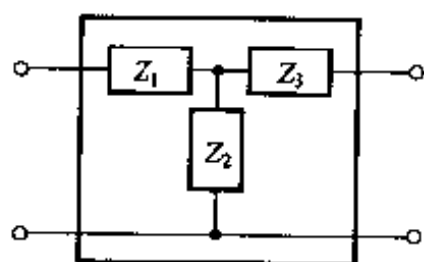


图 7.14 T 型网络

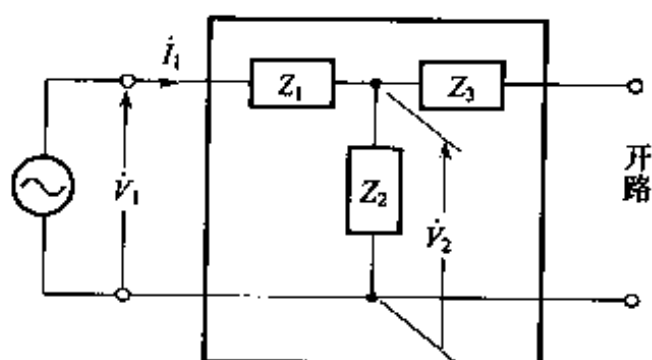


图 7.15 求 A、C (输出端开路, $i_2 = 0$)

同理,从式(7.10)中求 B 、 D 时,如图 7.16 所示,可将输出端短路

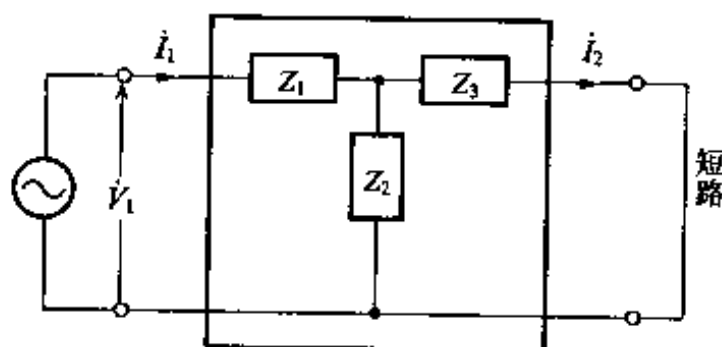


图 7.16 求 B 、 D (输出端短路, $\dot{V}_2 = 0$)

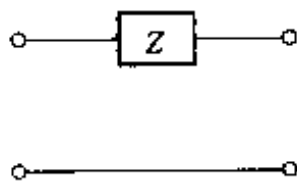
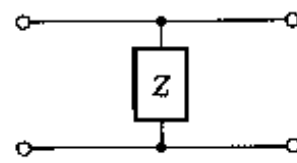
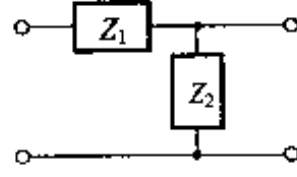
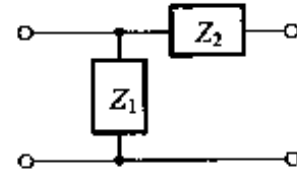
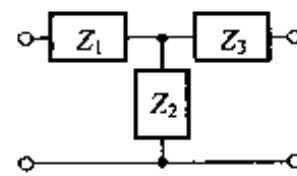
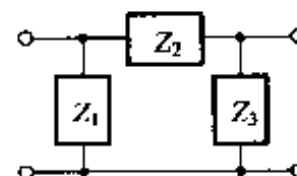
$$B = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{V}_2=0}, \quad \dot{I}_2 = \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \dot{I}_1 \dots\dots (1)$$

将 $\dot{I}_1 = \frac{\dot{V}_1}{Z_1 + Z_2 Z_3 / (Z_2 + Z_3)}$ 代入上式后整理可得

$$\dot{I}_2 = \frac{Z_2}{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3} \dot{V}_1, \quad B = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} = \frac{Z_1(Z_2 + Z_3) + Z_2 Z_3}{Z_2}$$

$$D = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{V}_2=0}$$

表 7.1 F 参数

网络名称	网络图	A	B	C	D
— 型		1	Z	0	1
1 型		1	0	$\frac{1}{Z}$	1
反 L 型		$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$	Z_1	$\frac{1}{Z_2}$	1
Γ 型		1	Z_2	$\frac{1}{Z_1}$	$1 + \frac{Z_2}{Z_1}$
T 型		$1 + \frac{Z_1}{Z_2}$	$\frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2}$	$\frac{1}{Z_2}$	$1 + \frac{Z_3}{Z_2}$
π 型		$1 + \frac{Z_2}{Z_3}$	Z_2	$\frac{Z_1 + Z_2 + Z_3}{Z_1 Z_3}$	$1 + \frac{Z_2}{Z_1}$

由式(1),得

$$D = \dot{I}_1 / \dot{I}_2 = (Z_2 + Z_3) / Z_2$$

因此可知, $AD - BC = 1$ 。

表 7.1 为 T 型、 π 型,反 L 型和 L 型网络及 —(横—)、1(竖—)型网络 F 参数的一览表。

在 T 型和 π 型网络中,当 $Z_1 = Z_3$ 时, $A = D$,这种网络称为对称网络。

7.6 四端子网络的连接

下面讨论由两个四端子网络连接构成的复合四端子网络的参数。

7.6.1 级联与 F 参数

如图 7.17 所示,第一个四端子网络的输出端与第二个四端子网络的输入端相连的形式称为级联。若知道复合四端子网络的 F 参数,就可求出级联时的输入与输出的关系,下面讨论复合四端子网络的 F 参数。

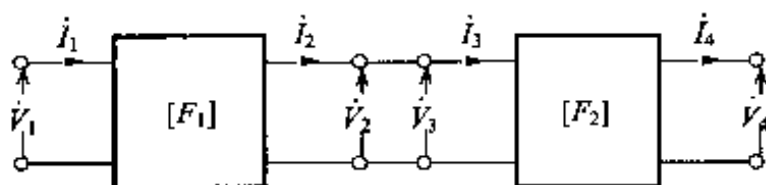


图 7.17 级联

在图 7.17 中, F_1 、 F_2 两黑盒各自输入端的电压、电流可由 F 参数表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ \dot{I}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_4 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix}$$

从图中可知: $\dot{V}_2 = \dot{V}_3$, $\dot{I}_2 = \dot{I}_3$, 将此代入上式, 求得 $\dot{V}_1$ 、 $\dot{I}_1$ 为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_2 & B_2 \\ C_2 & D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_4 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix}$$

因为矩阵的乘法为

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}y_{11} + x_{12}y_{21} & x_{11}y_{12} + x_{12}y_{22} \\ x_{21}y_{11} + x_{22}y_{21} & x_{21}y_{12} + x_{22}y_{22} \end{bmatrix}$$

因此上式可表达为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 A_2 + B_1 C_2 & A_1 B_2 + B_1 D_2 \\ C_1 A_2 + D_1 C_2 & C_1 B_2 + D_1 D_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_4 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix}$$

级联构成的复合四端子网络的 F 参数矩阵等于相级联的两个四端子网络 F 参数矩阵之乘积。

● 7.6.2 串联与 Z 参数

图 7.18 所示的联接称为**串联**。乍一看,图似乎是并联的,实际上,电流是从上面的黑盒子 Z 直接流向下面的黑盒子 Z' 的,所以他们是串联关系。

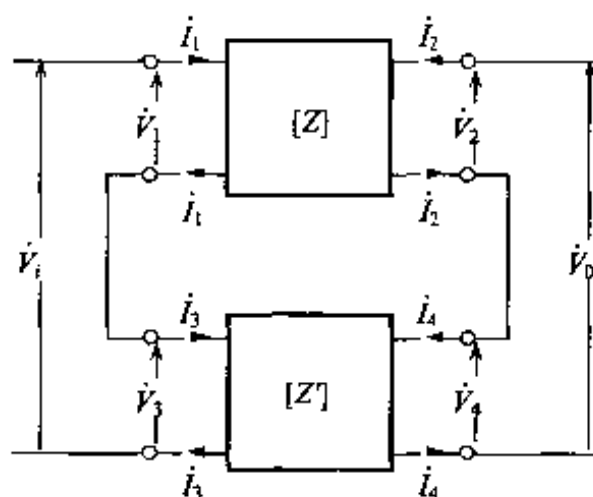


图 7.18 串 联

串联时,采用 Z 参数分析比较方便。

对 Z 与 Z' 两个黑盒子,用 Z 参数表示电压与电流的关系式为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix}$$

由图 7.18 知

$$\dot{V}_i = \dot{V}_1 + \dot{V}_3, \quad \dot{I}_1 = \dot{I}_3$$

$$\dot{V}_o = \dot{V}_2 + \dot{V}_4, \quad \dot{I}_2 = \dot{I}_4$$

故

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{V}_3 \\ \dot{V}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z'_{11} & Z'_{12} \\ Z'_{21} & Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_3 \\ \dot{I}_4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Z_{11} + Z'_{11} & Z_{12} + Z'_{12} \\ Z_{21} + Z'_{21} & Z_{22} + Z'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

因此,串联而成的复合四端子网络的 Z 参数等于相串联的两个网络的参数之和。

● 7.6.3 并联与 Y 参数

图 7.19 的联接方式为并联形式,并联是采用 Y 参数分析比较简单。

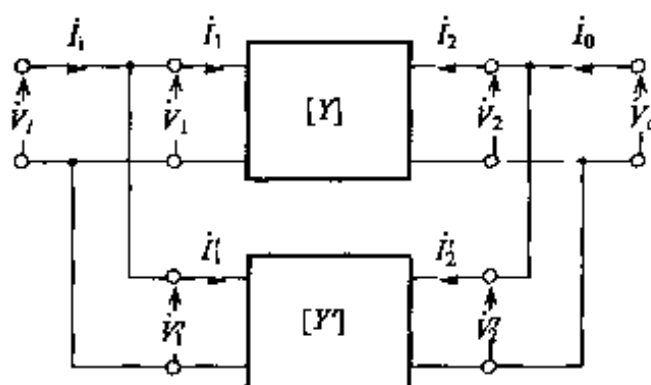


图 7.19 并 联

Y 与 Y' 两个黑盒电流为

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}'_1 \\ \dot{V}'_2 \end{bmatrix}$$

由图可知,两个黑盒之间,有下列关系成立:

$$\dot{I}_i = \dot{I}_1 + \dot{I}'_1 \quad \dot{V}_1 = \dot{V}'_1 = \dot{V}_i$$

$$\dot{I}_o = \dot{I}_2 + \dot{I}'_2 \quad \dot{V}_2 = \dot{V}'_2 = \dot{V}_o$$

由此可知

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{I}_i \\ \dot{I}_o \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{V}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y'_{11} & Y'_{12} \\ Y'_{21} & Y'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}'_1 \\ \dot{V}'_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} Y_{11} + Y'_{11} & Y_{12} + Y'_{12} \\ Y_{21} + Y'_{21} & Y_{22} + Y'_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_i \\ \dot{V}_o \end{bmatrix} \end{aligned}$$

因此,并联后的复合四端子网络的 Y 参数等于相并联的两个网络的 Y 参数之和。

【例 7.2】 知道输出,求输入的问题。

如图 7.20 所示,变压器的输出(次级)端的电压、电流分别为 $\dot{V}_2 = 100\text{V}$, $\dot{I}_2 = 200\text{A}$,用 F 参数求输入(初级)端的电压 $\dot{V}_1$ 、电流 $\dot{I}_1$,其中 n_1 为初级线圈匝数, n_2 为次级线圈的匝数,匝数比 $n_1/n_2 = 33$ 。另外,设电压与匝数成正比,电流与匝数成反比,即 $\dot{V}_1/\dot{V}_2 = n_1/n_2$, $\dot{I}_1/\dot{I}_2 = n_2/n_1$ 。

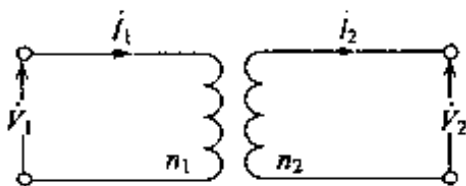


图 7.20 变压器

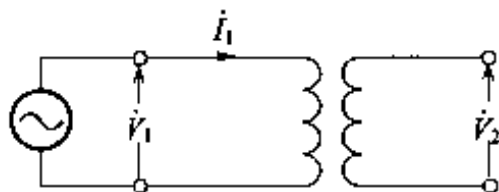


图 7.21 次级端开路($\dot{I}_2 = 0$)

解 初级与次级的关系由 F 参数表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{V}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}$$

展开上式为

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = A\dot{V}_2 + B\dot{I}_2 \\ \dot{I}_1 = C\dot{V}_2 + D\dot{I}_2 \end{cases}$$

如图 7.21 所示,将次级端开路,即令 $\dot{I}_2 = 0$,则由上式可知

$$A = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{V}_2} = \frac{n_1}{n_2} \quad C = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2} \right)_{\dot{I}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{V}_2}$$

因

$$\dot{I}_1 = (n_2/n_1)\dot{I}_2 = (n_2/n_1) \times 0 = 0$$

故

$$C = \dot{I}_1/\dot{V}_2 = 0/\dot{V}_2 = 0$$

然后,如图 7.22 所示,将次级端短路,令 $\dot{V}_2 = 0$,则

$$B = \left(\frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{V}_2=0} = \frac{\dot{V}_1}{\dot{I}_2}$$

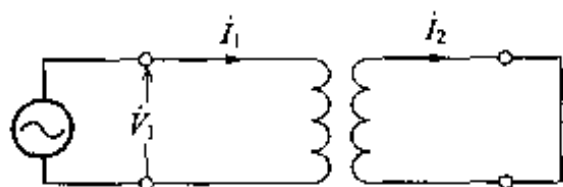


图 7.22 次级端短路 ($\dot{V}_2=0$)

当将次级端短路时,产生在次级端上的电压因电阻为 0,而被短路了。因此, $\dot{I}_2=\infty$ 所以

$$B = \dot{V}_1 / \dot{I}_2 = \dot{V}_1 / \infty = 0 \quad D = \left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} \right)_{\dot{V}_2=0} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}$$

虽然 $\dot{I}_2$ 的值非常大,但因为 $\dot{I}_1 / \dot{I}_2 = n_2 / n_1$, 所以

$$D = \dot{I}_1 / \dot{I}_2 = n_2 / n_1$$

变压器的 F 参数值分别为

$$A = n_1 / n_2 \quad B = 0 \quad C = 0 \quad D = n_2 / n_1$$

把 A 、 B 、 C 、 D 的值代入(1)式,得

$$\dot{V}_1 = A\dot{V}_2 = \frac{n_1}{n_2}\dot{V}_2 \quad \dot{I}_1 = D\dot{I}_2 = \frac{n_2}{n_1}\dot{I}_2$$

把 $\dot{V}_2=100\text{V}$, $\dot{I}_2=200\text{A}$, $n_1/n_2=33$ 代入上面式子,可得

$$\dot{V}_1 = \frac{n_1}{n_2}\dot{V}_2 = 33 \times 100 = 3300\text{V}$$

$$\dot{I}_1 = D\dot{I}_2 = \frac{n_2}{n_1}\dot{I}_2 = \frac{1}{33} \times 200 = 6.06\text{A}$$

此例题中的变压器为理想变压器,所以由匝数比可以直接求出 $\dot{V}_1$ 和 $\dot{V}_2$ 。这里只是为了练习 F 参数,而进行了上面的计算。

【例 7.3】 最大功率的供给问题。

把向负载提供最大功率称为**匹配(matching)**。

本章中并没有涉及到匹配的问题。但是,因为实际中常常碰到此类问

题,下面就举例说明电压与负载之间的匹配。

在图 7.23 中的网络中,电源内阻为 $r=0.5\Omega$,负载的电阻为 $R=20\Omega$,若想在两者之间加入“反 L 型”网络,以达到电源与负载相匹配。问 Z_1 、 Z_2 该为多少?

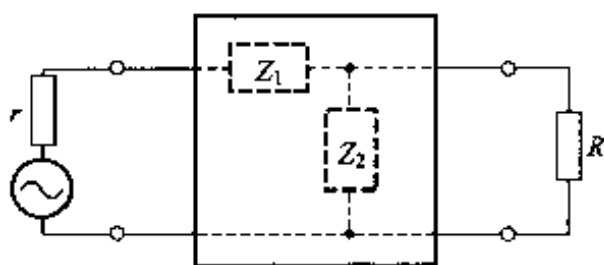


图 7.23 匹 配

解 利用镜像阻抗可求出匹配条件。镜像阻抗定义如下:如图 7.24 所示,在特定情况下,接在输出端 2-2' 端子上的负载,其阻值与网络的输出阻抗 Z_{12} 相等。输入端电源内阻抗与网络的 1-1' 端的输入阻抗 Z_{11} 相等。从 1-1' 端子左右看时,一边是 Z_{11} ,另一边就好像是 Z_{11} 在镜子里的成像。从 2-2' 端左右看到时,一边是 Z_{12} ,另一边就像是 Z_{11} 在镜子中的成像。因此称 Z_{11} 和 Z_{12} 为镜像阻抗。

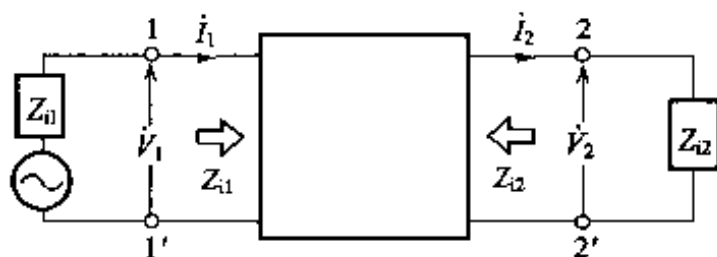


图 7.24 镜像阻抗电路

由以上的定义建立方程式,可求出 Z_{11} 、 Z_{12} 为

$$Z_{11} = \sqrt{AB/CD} \quad Z_{12} = \sqrt{DB/CA}$$

当电源内阻抗为纯电阻 r 、负载的阻抗也为纯电阻 R 时,只要求出使“反 L 型”网络的输入端阻抗 $Z_{11} = r$,负载端阻抗 $Z_{12} = R$ 成立的 Z_1 与 Z_2 即可

$$Z_{11} = \sqrt{AB/CD} = r \quad (1)$$

$$Z_{12} = \sqrt{DB/CA} = R \quad (2)$$

由式(1)×式(2) 得

$$B/C=rR \quad (3)$$

由式(1)÷式(2) 得

$$A/D=r/R \quad (4)$$

从表 7.1 知,反 L 型网络的 F 参数为

$$A=1+Z_1/Z_2 \quad B=Z_1 \quad C=1/Z_2 \quad D=1$$

把 A、B、C、D 的值代入式(3)、式(4),得

$$Z_1 Z_2=rR \quad (5)$$

$$1+Z_1/Z_2=r/R \quad (6)$$

把式(5)代入式(6),得

$$1+Z_1/(rR/Z_1)=r/R$$

$$Z_1=\pm\sqrt{r(r-R)} \quad (7)$$

把 $r=0.5\Omega$ 、 $R=2\Omega$ 代入式(7),得

$$Z_1=\pm\sqrt{r(r-R)}=-j0.866\Omega \quad (8)$$

把式(8)代入式(5),得

$$Z_2=rR/Z_1=0.5\times 2/\pm j0.866=\mp j1.15\Omega$$

因 Z_1 、 Z_2 的正负号取法顺序相同,故

- 或
- ① $Z_1=j0.866\Omega$ 时, $Z_2=-j1.15\Omega$
 - ② $Z_1=-j0.866\Omega$ 时, $Z_2=j1.15\Omega$

因此,在图 7.23 的电路中,为了达到匹配,有以下两种方法。

- ① 在 Z_1 中放入 L ,在 Z_2 中放入 C 。
- ② 在 Z_1 中放入 C ,在 Z_2 中放入 L 。

此题中,因 $r<R$,所以(7)式中根号内为负数,故 Z_1 是虚数,即为电抗成分取正负值。若 $r>R$,则括号内的为正数, Z_1 就是纯电阻,只取正值。

►► 练习题

习题 1

在图 7.25 所示的小信号晶体管中,以 E 端为共同端子,给输出端 B-E 间和输出端 C-E 间加上偏压(E_{BE} 、 E_{CE}),通过下面的交流放大,测到了一些数据。

首先,将输出端子 C-E₂ 间交流短路($V_2=0$)。在加上输出电压 $V_1=10\text{mV}$ 时,输入

端电流 $I_1 = 2\mu\text{A}$, 输出端电流 $I_2 = 0.2\text{mA}$, 求此晶体管的 h 参数 $[h_{11}(h_{ie}) \text{ 及 } h_{21}(h_{fe})]$ 。

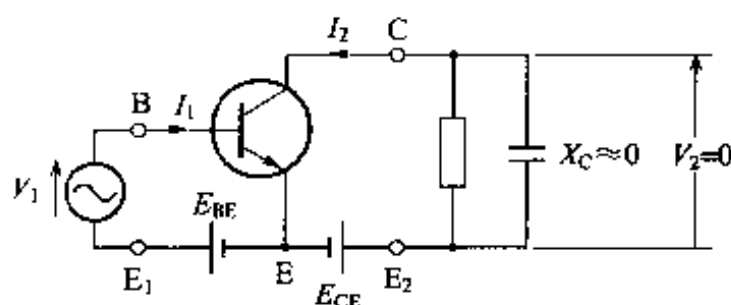


图 7.25 交流输出短路

习题 2

在图 7.26 所示的反 L 型网络中, 若想给输出端提供 $\dot{V}_2 = 140\text{kV}$, $\dot{I}_2 = 2\text{kA}$ 的电能, 问输入端的电压 $\dot{V}_1$ 与电流 $\dot{I}_1$ 该为多少?

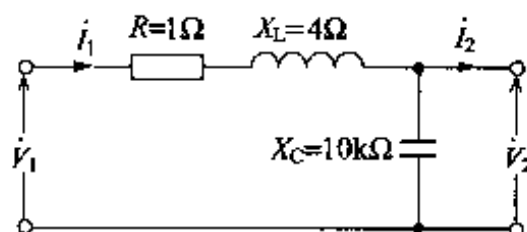


图 7.26 反 L 型网络

习题 3

将图 7.27(a)所示的反 L 型网络与图 7.27(b)所示的 π 型(横-)型网络连接, 求证联接后复合网络的 F 参数等于表 7.1 中 T 型网络的 F 参数。

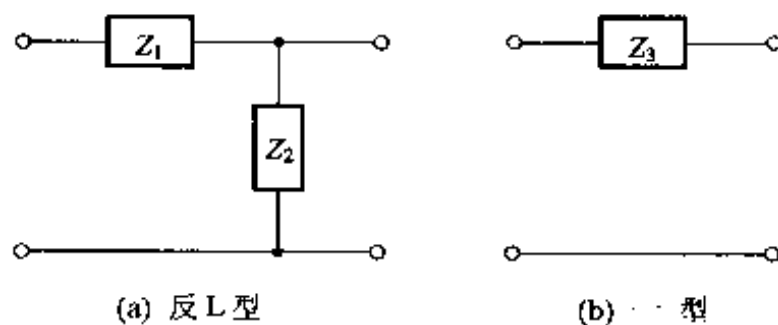


图 7.27 级联

第 8 章 过渡现象

电路中的电压和电流不总是保持在一个定值，当电路的工作条件发生变化如短路、闭合开关等时，电路将会从以前的状态经过一段时间的变化后达到一个新的状态。把这种状态的转移过程中电路的变化称为过渡现象。

本章主要讨论已学过的直流电路、交流电路的过渡现象及计算方法。

8.1 各种过渡现象

电路在达到一个新的状态之前，要经历一个变化过程，这个过程叫做过渡过程。最后达到的那个状态称为稳定状态(参照第 2 章)。但是，由于图 8.1 所示的过渡状态是周期性变化的，因此，可采取交流电路的分析方法，又因其平均值一定，可认为是稳定状态，所以又可以按照直流电路的稳定状态的计算方法来计算。

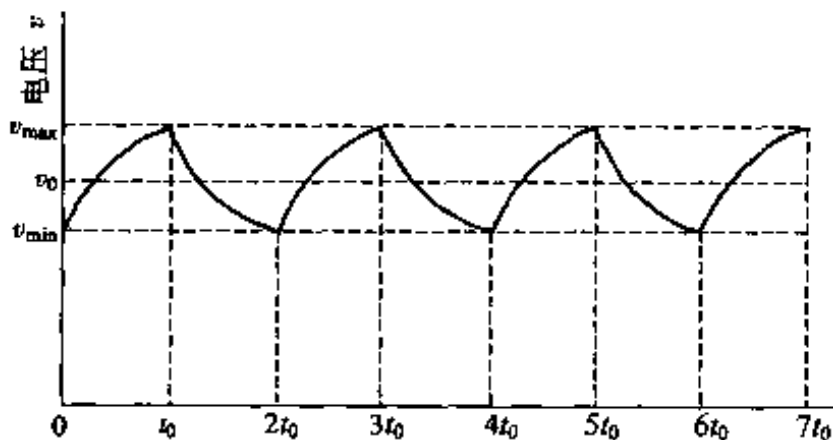


图 8.1 周期性变化的过渡现象

另外,对图 8.2 实线描述的电路的过渡特性,可忽略其振动部分,认为是按虚线描述的平均值变化的,这样就可以当作是直流电路的过渡现象来分析。

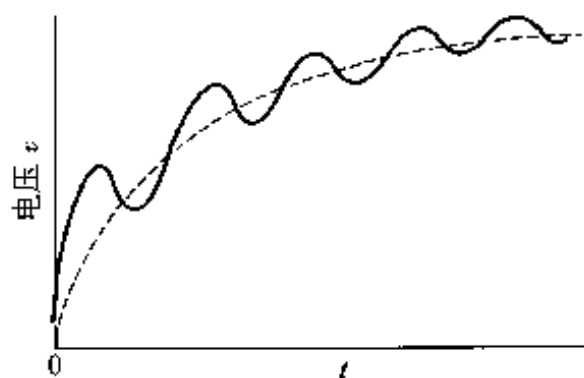


图 8.2 含振荡成分的过渡现象

对于像交流电路这样有周期性变化的过渡现象的分析方法,从时间的变化范围来考虑,有以下两种方法。

(1) 利用电压、电流的平均值(有效值)计算。

(2) 利用电压、电流的波形(瞬时值)进行详细计算。

因机器的热额定,需要把握特性时,可用平均值分析;那些连接有对瞬时过电流反应敏感元件的电路,瞬时分析是必不可少。在输送电力的电路(电力系统)中,诸如对发电机的控制装置的分析或是电力流动的过渡现象的分析,用有效值计算。分析含有波形设计上必不可少的晶闸管的电路,或分析雷电冲击时,应采用瞬时值计算。

另外,就电路元件的空间分布程度,可将其分为集总参数电路和分布参数电路。这里通常考虑集总参数电路。关于分布参数电路的过渡现象,在此不做讨论。

电路元件参数的空间分布

导线可以看作是没有电阻的,或是认为有电阻,但电阻集中在某个地方,因为这种处理方法,便于建立方程式,也易于求解。但是,实际上,导线具有一定的长度,而电阻也均匀分布在整根线上。因此,想知道导线上某一点的电压与电流时,就必须将导线的电阻进行分布计算。另外,如果电流是随时间变化的,那么它流过长导线时,就会产生传输时间上的滞后。通常我们假设导线外层绝缘体的电阻为无穷大,而实际上它并不是无穷大,故而会有一定程度的漏电。对以上种种现象,可认为 L 和 C 分布在导线上及周围空间,从而表现了电路的分布特性。对交流电路或变化非常快的过渡现象进行分析,都需要考虑 L 或 C 的空间分布。

8.2 过渡现象的微分方程式

8.2.1 直流电路的电路方程式

有关过渡现象,第一章中略微提到过。下面,我们推导一下过渡现象的方程式。在图 8.3 的 RL 直流电路中,设电源电压为 V ,电阻(电源内阻和线路电阻)为 R ,电感值为 L 。因电感的端电压为 $L(dI/dt)$,所以电路方程式为

$$V = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (8.1)$$

这是一阶常系数线性微分方程,可求出

$$I(t) = \frac{V}{R}(1 - e^{-(R/L)t}) \quad (8.2)$$

如图 8.4 所示,它表示了当开关闭合时电路中从开始有电流到达到稳定状态这一段时间内电流的变化情况。

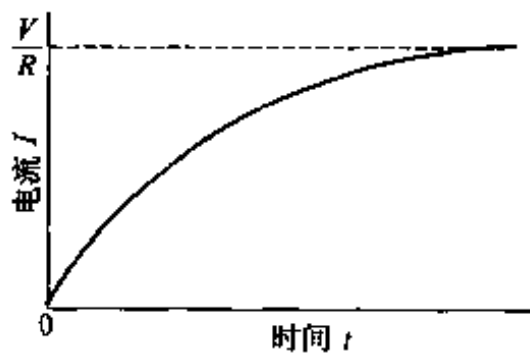


图 8.4 RL 直流电路的过渡波形

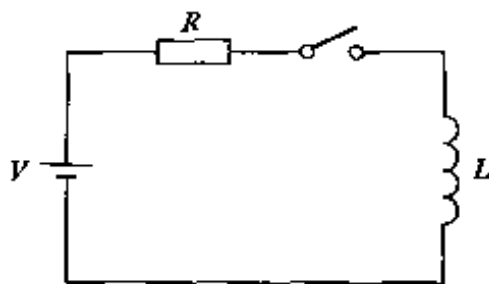


图 8.3 RL 直流电路

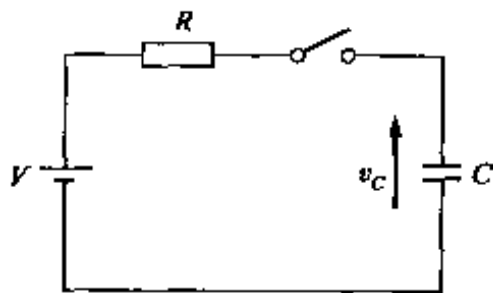


图 8.5 RC 直流电路

对图 8.5 所示的 RC 直流电路,可采用同样的方法,建立下面的方程式:

$$V = RI + \frac{1}{C} \int I dt \quad (8.3)$$

其解为

$$I(t) = \frac{V}{R} e^{-(1/RC)t} \quad (8.4)$$

电流波形图如图 8.6 所示,它表示了当闭合电路中连接有未储能的电

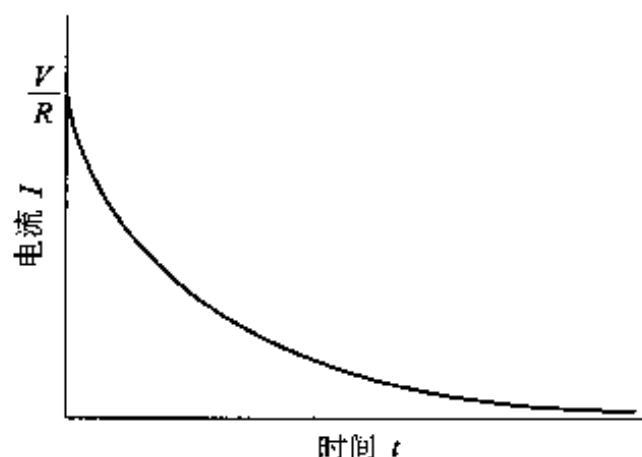


图 8.6 RC 直流电路的过渡波形

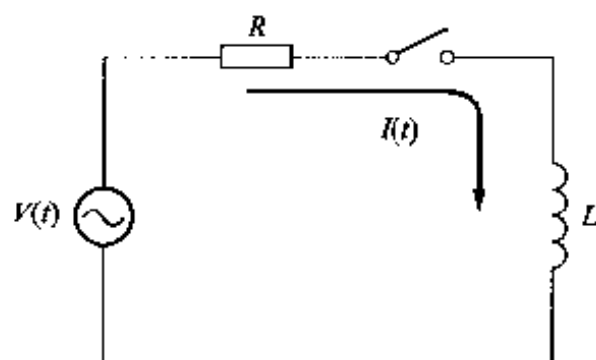


图 8.7 交流电路

容(电容具有储能功能)时电路中电流的变化情况。

● 8.2.2 交流电路的电路方程式

下面建立图 8.7 所示的交流电路的电路方程式。交流电源为

$$V(t) = V_0 \cos \omega t \quad (8.5)$$

当开关闭合后,电路的方程式可表示为

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V_0 \cos \omega t \quad (8.6)$$

解此方程式得

$$I(t) = A_0 \cos(\omega t - \theta_0) - A_0 \cos \theta_0 e^{-(R/L)t} \quad (8.7)$$

其中

$$A_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \quad \theta_0 = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad (8.8)$$

电流波形如图 8.8 所示。

式(8.7)右边第一项与交流电压的表达式相同,因此可视为稳态解,第二项为过渡解。此图描述了当电器产品接入家用的交流电源时电流的变化情况。

● 8.2.3 微分算子

对于前面两节讨论的简单电路,通过直接求解微分方程,就可计算出电压、电流等的变化。而对复杂的电路,由于微分方程的阶数和项数较多,计算比较繁琐,但是如果使用微分及积分算子,就会简化电路的计算。下面来讨论这种方法。

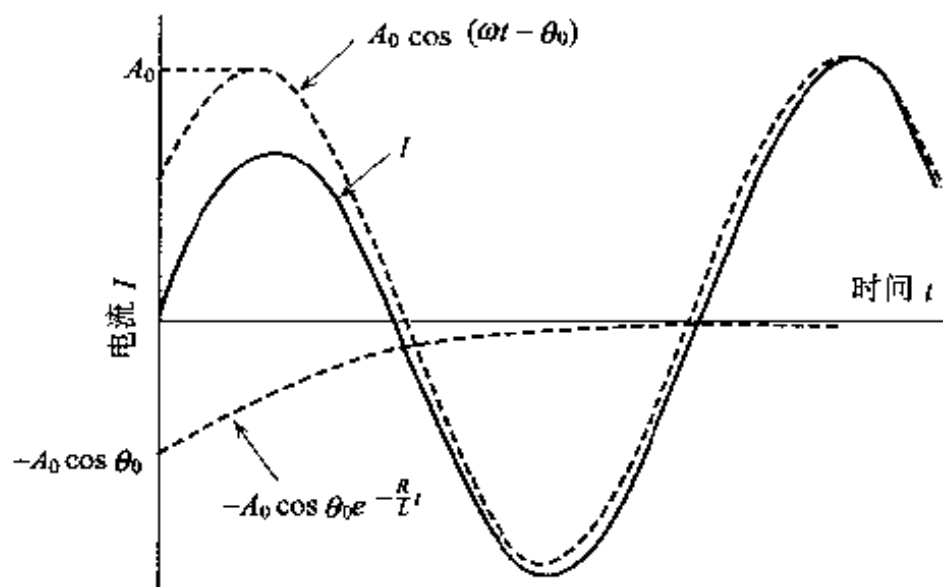


图 8.8 交流电路的过渡波形

对 8.2.1 和 8.2.2 两节的电路方程式中的微分项和积分项,我们引入微分算子 s (积分算子 l):

$$s = \frac{d}{dt} \quad (8.9)$$

$$l = \frac{1}{s} = \int dt \quad (8.10)$$

对于交流电路,因为交流电源为正弦波(参照 3、6 节),因此电感和电容的端电压分别为

$$V_L = L \frac{dI}{dt} = j\omega L \cdot I \quad (8.11)$$

$$V_C = \frac{1}{C} \int I dt = \frac{1}{j\omega C} I \quad (8.12)$$

若以微分算子 s 来描述,则只要用 s 替代 $j\omega$ 就可以了。

上式是表示 LC 元件的电压与电流关系的电路方程式。由此可知,交流电路中,电感、电容的阻抗用算子可表示为

$$Z = j\omega L = sL \quad (8.13)$$

$$Z = 1/j\omega C = 1/sC \quad (8.14)$$

在分析交流电路的过渡现象时,通过以上的方法就可以建立类似于分析直流电路的过渡现象时所建立的方程式,然后对其求解。

8.3 拉普拉斯变换

● 8.3.1 拉普拉斯变换的定义

分析复杂电路的过渡现象时,如果就按微分方程式的形式求解,多数情况下数学上的计算非常复杂。不过,有一种简单的方法,那就是把微分方程式变换为代数方程式,然后只要进行一般的加减乘除运算,就可对过渡现象进行分析计算。这种方法就是拉普拉斯变换。它实际上是将使用微分算子的分析方法一般化了。也就是说,拉普拉斯变换把时间函数的微分方程变换成含有微分算子的代数方程式,从而使计算、分析、评价等变得简单了。与此相反,把微分算子 s 表示的函数变换到时间 t 表示的函数,称为拉普拉斯逆变换。

将某函数 $f(t)$ 进行如下变换,求新函数 $F(s)$:

$$g(t) = f(t)e^{-st} \quad (8.15)$$

$$s = a + j\omega \quad (8.16)$$

则新函数为

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-at}e^{j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \end{aligned} \quad (8.17)$$

把式(8.17)称为 $f(t)$ 的拉普拉斯变换式。而把

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \quad (8.18)$$

叫做拉普拉斯逆变换式。

拉普拉斯变换和逆变换通常表示为

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) \quad (8.19)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t) \quad (8.20)$$

● 8.3.2 基本的拉普拉斯变换

下面来推导基本函数的拉普拉斯变换的公式。

1 单位阶跃函数

图 8.9(a) 所示的函数称为单位阶跃函数, 其函数式为

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.21)$$

单位阶跃函数是讨论过渡现象时用到的重要函数。将此函数进行拉普拉斯变换, 则为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t)] &= \int_0^{\infty} u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \end{aligned} \quad (8.22)$$

如图 8.9(b) 所示, 在 $t=a$ 时刻发生跃变的函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t-a)] &= \int_a^{\infty} u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \frac{e^{-sa}}{s} \end{aligned} \quad (8.23)$$

由此可知, e^{-sa} 是表示时间延迟的函数。

2 单位斜坡函数

如图 8.10 所示, 与时间同时增大的斜坡函数

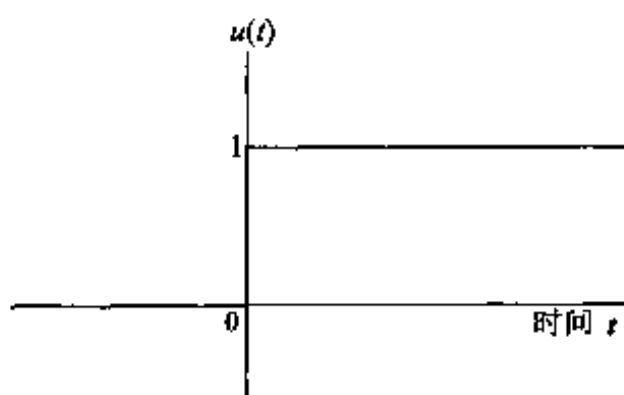
$$\rho(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases} \quad (8.24)$$

其拉普拉斯变换为

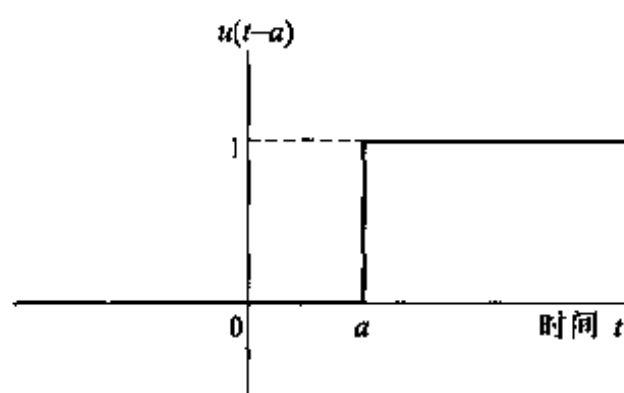
$$\mathcal{L}[\rho(t)] = \int_0^{\infty} \rho(t)e^{-st} dt = \int_0^{\infty} te^{-st} dt = \frac{1}{s^2} \quad (8.25)$$

3 单位冲激函数

单位冲激函数的函数式为



(a) $t=0$ 时的变化



(b) $t=a$ 时的变化

图 8.9 单位阶跃函数

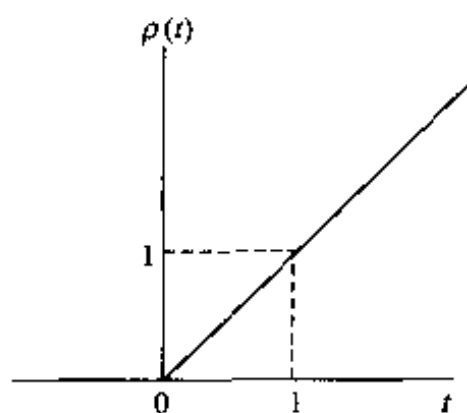


图 8.10 单位斜坡函数

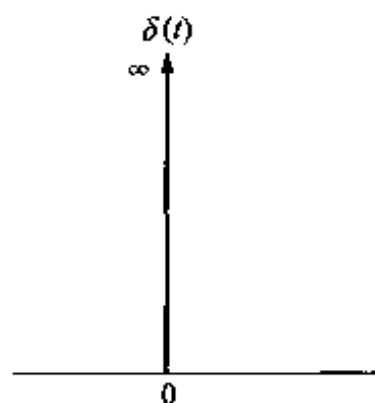


图 8.11 单位冲激函数

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases} \quad (8.26)$$

其积分值为 1, 是了解电路性质的重要函数。图 8.11 所示是此函数的表示图。单位冲激函数的拉普拉斯变换式为

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt = 1 \quad (8.27)$$

4 指数函数

指数函数的拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \frac{1}{s+a} \quad (8.28)$$

这是用来描述表示衰减现象的过渡特性的重要函数。

5 三角函数

三角函数可先变换为下面的复指数函数, 然后再进行拉普拉斯变换, 这样换算较为简单, 即

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\sin \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right] \\ &= \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \omega / (s^2 + \omega^2) \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos \omega t] &= \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega} \right) = s / (s^2 + \omega^2) \end{aligned} \quad (8.30)$$

这是描述过渡响应的振动波形的函数,常常出现。

三角函数和复数函数

当指数为实数时,指数函数为单调递增或单调递减函数。当指数部为复数时,可将其变换为下面的三角函数:

$$e^{j\omega t} = \cos\omega t + j\sin\omega t$$

$$e^{-j\omega t} = \cos\omega t - j\sin\omega t$$

由上式,可将三角函数变换为复指数函数的形式

$$\sin\omega t = (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})/2j$$

$$\cos\omega t = (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})/2$$

在电路计算中经常出现的函数的拉普拉斯变换和拉普拉斯逆变换的公式,都总结在表 8.1 中。

表 8.1 主要函数的拉普拉斯变换

$f(t)$	$F(s)$	$f(t)$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{s\cos\theta - \omega\sin\theta}{s^2 + \omega^2}$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$\rho(t) = t$	$\frac{1}{s^2}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$e^{-at}\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{\omega\cos\theta + (s+a)\sin\theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}\cos(\omega t + \theta)$	$\frac{(s+a)\cos\theta - \omega\sin\theta}{(s+a)^2 + \omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\sinh\beta t$	$\frac{\beta}{s^2 - \beta^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\cosh\beta t$	$\frac{s}{s^2 - \beta^2}$
$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$	$e^{-at}\sinh\beta t$	$\frac{\beta}{(s+a)^2 - \beta^2}$
$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$	$e^{-at}\cosh\beta t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 - \beta^2}$
$\sin(\omega t + \theta)$	$\frac{\omega\cos\theta + s\sin\theta}{s^2 + \omega^2}$		

8.4 拉普拉斯变换的应用

8.4.1 简单电路的分析

下面计算 R 、 L 、 C 直流电路的拉普拉斯变换。表示电路元件 R 、 L 、 C 的端电压和电流之间关系的时间函数为

$$v(t) = Ri(t) \quad (8.31)$$

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (8.32)$$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (8.33)$$

设 $v(t)$ 、 $i(t)$ 的拉普拉斯变换分别为 $V(s)$ 、 $I(s)$ ，则在元件未储能时各自的拉普拉斯变换可表示为

$$V(s) = RI(s) \quad (8.34)$$

$$V(s) = sLI(s) \quad (8.35)$$

$$I(s) = sCV(s) \quad (8.36)$$

利用上面三式，求图 8.12 所示的 RL 直流电路中在 $t=0$ 开关闭合时电流的过渡响应。

微分方程式为

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = v(t) \quad (8.37)$$

对此进行拉普拉斯变换，则为

$$sLI(s) + RI(s) = \frac{1}{s}V_0 \quad (8.38)$$

V_0 为图 8.12 所示电路中电压源的值。

因此

$$I(s) = \frac{1}{s}V_0/(sL + R) = \frac{1}{s}I_\infty + \frac{LI_\infty}{sL + R} \quad (8.39)$$

$$I_\infty = V_0/R \quad (8.40)$$

根据表 8.1，进行拉普拉斯逆变换，变回到时间函数，则为

$$\mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}V_0/(sL + R)\right]$$

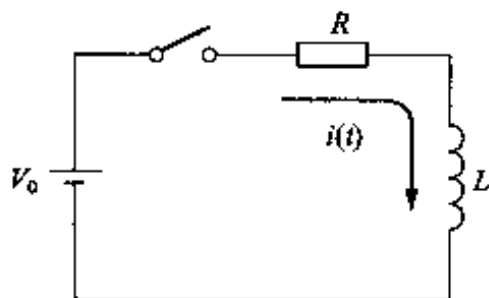


图 8.12 RL 直流电路

$$= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} I_{\infty} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{L I_{\infty}}{sL + R} \right) = I_{\infty} - I_{\infty} e^{(-R/L)t} \quad (8.41)$$

即

$$i(t) = I_{\infty} (1 - e^{(-R/L)t}) \quad (8.42)$$

通过此式,可求出电流的时间变化。

【例 8.1】 在图 8.13 的 RC 直流电路中,求当 $t=0$ 开关闭合时电流的过渡响应。

解 设 C 的端电压为 $v_C(t)$,则微分方程式为

$$i(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad (8.43)$$

$$v_C(t) + Ri(t) = V_0 \quad (8.44)$$

将这两式转换为关于 $v_C(t)$ 的微分方程,则

$$v_C(t) + RC \frac{dv_C(t)}{dt} = V_0 \quad (8.45)$$

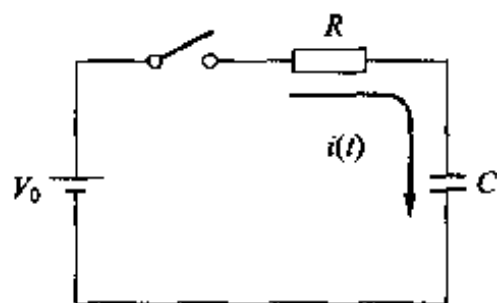


图 8.13 RC 直流电路

将其进行拉普拉斯变换,得

$$V_C(s) + sRCV_C(s) = V_0/S \quad (8.46)$$

因此

$$V_C(s) = V_0/(sRC + 1)S \quad (8.47)$$

根据表 8.1,进行拉普拉斯逆变换,变回到时间函数,即

$$v_C(t) = V_0 (1 - e^{-(1/RC)t}) \quad (8.48)$$

电流为

$$i(t) = \frac{V_0}{R} e^{-(1/RC)t} \quad (8.49)$$

● 8.4.2 传递函数和方框图

当电路中连接有用拉普拉斯变换表示的元件时,使用传递函数分析比较方便。下面我们来学习传递函数。

电路中,在某端子上加上电压 V_1 ,求其他端子上的电压 V_2 时,设 V_1 为输入, V_2 为输出,则二者的关系表示为

$$V_2(s) = H(s) \cdot V_1(s) \quad (8.50)$$

此关系式中, $H(s)$ 称为传递函数。另外,它们之间的关系也可用图 8.14 来表示。这种图形称为方框图。方框图对用拉普拉斯变换分析过渡现象非常

有帮助。

在图 8.15 的电路中, 设输入电压为 $v_1(t)$, 输出电压为电容的端电压 $v_2(t)$, 建立的电路方程式为

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau = v_1(t) \quad (8.51)$$

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \quad (8.52)$$

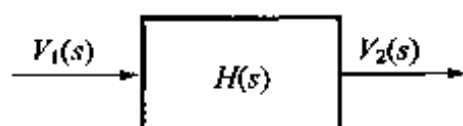


图 8.14 方框图

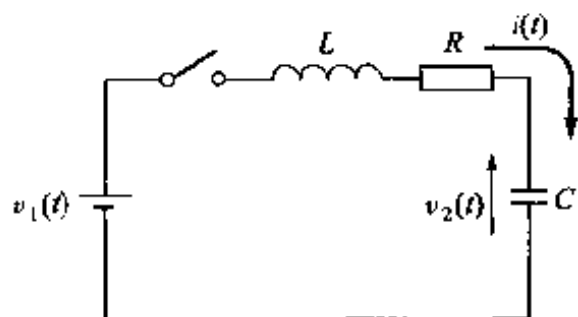


图 8.15 RLC 串联电路

将两式进行拉普拉斯变换, 可得

$$LsI(s) + RI(s) + \frac{1}{Cs}I(s) = V_1(s) \quad (8.53)$$

$$V_2(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \quad (8.54)$$

式(8.53)可变形为

$$I(s)(Ls + R + 1/Cs) = V_1(s) \quad (8.55)$$

$$I(s) = \frac{1}{Ls + R + 1/Cs} V_1(s) = H_1(s) \cdot V_1(s) \quad (8.56)$$

因此, 方框图可表示为图 8.16。传递函数 $H_1(s)$

$$H_1(s) = \frac{1}{Ls + R + 1/Cs} \quad (8.57)$$

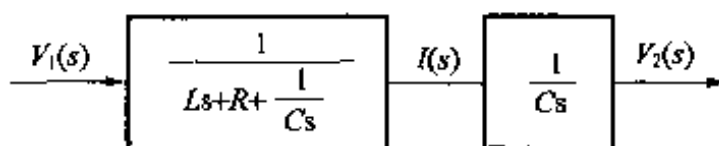


图 8.16 RLC 串联电路的方框图

同理,由式(8.54),可得到传递函数

$$H_2(s) = \frac{1}{Cs} \quad (8.58)$$

整体上,传递函数为

$$V_2(s) = H_2(s) \cdot I(s) = H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot V_1(s) \quad (8.59)$$

设总的传递函数为 $H(s)$, 则

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) \quad (8.60)$$

所以

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s) = 1/(LCs^2 + RCs + 1) \quad (8.61)$$

无论输入电压为直流电压还是交流电压,也无论输入电压为何种波形,只要给输入的拉普拉斯变换乘以传递函数,就可求出输出的过渡响应。

另外,即使是复杂电路,只要求出各元件的传递函数,并且用方框图表示,就能很容易的知道电路的特性。因此,传递函数的使用非常广泛,它可以用来分析各种控制装置的过渡特性,研究发电机的动态特性以及判断系统的稳定性等等。

8.5 分布参数电路

● 8.5.1 分布参数电路的定义

前面我们讨论的电路是由 R 、 L 、 C 等电路元件组成的。但是,对于同轴电缆、输电线等,不能认为导体间的静电容量、电感等是集中在某一处,它们是沿着导线均匀分布的。而且,由于导线很长,同轴电缆或输电线在传送信号时输出信号在时间上会发生延迟。这种时候,电压、电流会产生波动,因此是时间和距离的函数。这种在分析时需要考虑电路参数的空间分布的电路,就称为分布参数电路。

与此相反,前面讨论过的电路,因为不考虑构成元件的物理尺寸,所以输入和输出在时间上没有延迟。这种电路称为集总参数回路。

图 8.17 为分布参数电路的其中一例。

如图 8.18 所示,分布参数电路可以近似地认为是,在空间上成分散分布,而且是无限连续联接的电路。

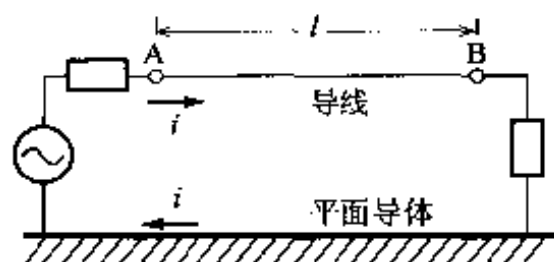


图 8.17 分布参数电路

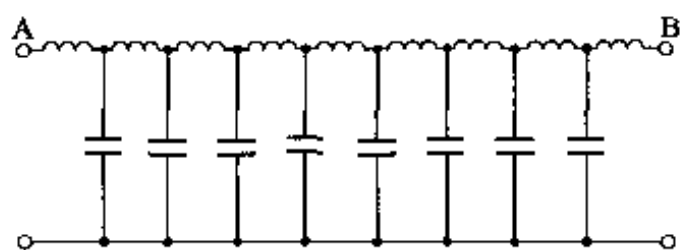


图 8.18 分布参数电路的等效电路

在此 LC 分布参数电路中, 设单位长度的电感及电容分别为 $L[\text{H/m}]$, $C[\text{F/m}]$ 。在图 8.19 中, 电线上 A_k 点的电压为 e , 电流为 i , A_{k+1} 点的电压为 $e + \Delta e$, 电流为 $i + \Delta i$, 则它们之间的关系为

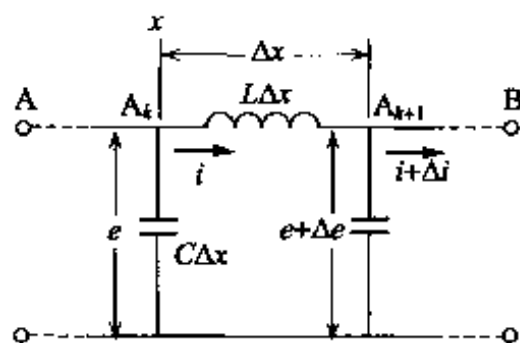


图 8.19 分布参数电路的等效电路的一部分

$$e + \Delta e = e - L\Delta x \frac{\partial i}{\partial t} \quad (8.62)$$

$$i + \Delta i = i - C\Delta x \frac{\partial(e + \Delta e)}{\partial t} \quad (8.63)$$

$\partial/\partial t$ 表示只求时间上的变化量。

当 Δx 接近于 0 时, 可得出下列两个偏微分方程式:

$$\frac{\partial e}{\partial x} = -L \frac{\partial i}{\partial t} \quad (8.64)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -C \frac{\partial e}{\partial t} \quad (8.65)$$

这两个公式是分布参数电路的基本表达式。上述公式可变为

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = -C \frac{\partial^2 e}{\partial t \cdot \partial x} = -C \frac{\partial}{\partial t} \left(-L \frac{\partial i}{\partial t} \right) = LC \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} \quad (8.66)$$

此式称为波动方程式。波动方程式的通解为

$$v = 1/\sqrt{LC} \quad (8.67)$$

因此

$$e(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (8.68)$$

此解称为达朗贝尔解,它表示正负方向的两个行波在传输。式(8.67)为此时行波的传输速度。另外,线电流为

$$i(x, t) = \frac{1}{Z} \{f_1(x - vt) + f_2(x + vt)\} \quad (8.69)$$

$$Z = \sqrt{L/C} \quad (8.70)$$

上式为线路的特性阻抗。若知道分布参数电路的 L 与 C ,就可求出 Z 。

在分布参数电路中,行波的传输速度和特性阻抗是决定电路性质的重要参数。

下面求典型分布参数电路的特性阻抗, μ 为两导体间介质的磁导率, ϵ 为介电常数。

● 8.5.2 基本的分布参数电路

1 平行导线

图 8.20 所示为平行导线,设导线半径为 r ,两线中心间的距离为 D ,则

$$L = \frac{\mu}{\pi} \ln \frac{D}{r} \quad (8.71)$$

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln(D/r)} \quad (8.72)$$

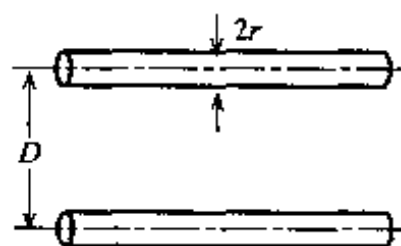


图 8.20 平行导线

由此可知

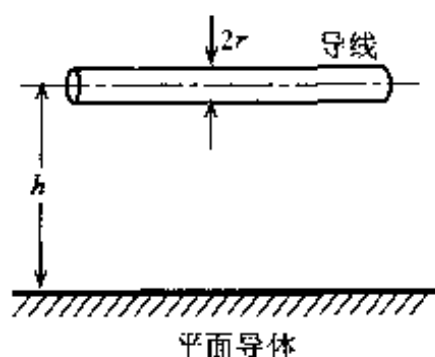
$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \frac{D}{r} \quad (8.73)$$

空气中的 $\mu = 4\pi \times 10^{-7}$, $\mu \cdot \epsilon = 1/[\text{光速}]^2 = 1.11 \times 10^{-17}$, 因此

$$Z = 120 \cdot \ln \frac{D}{r} \quad (8.74)$$

2 导线与平面

如图 8.21 所示,设导线半径为 r ,导线与平面间的距离为 h ,则



$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{2h}{r} \quad (8.75)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(2h/r)} \quad (8.76)$$

$$Z = 60 \cdot \ln(2h/r) \quad (8.77)$$

图 8.21 导线与平面导体

3 同轴电缆

如图 8.22 所示, 设内部导体的半径为 r , 内部导体中心到外部导体间的距离为 D , 则

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln(D/r) \quad (8.78)$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(D/r)} \quad (8.79)$$

同轴电缆的绝缘体的 μ 、 ϵ 与空气中的 μ 、 ϵ 不同。设其比率分别为 μ_s 、 ϵ_s , 则

$$Z = 60 \cdot \sqrt{\mu_s/\epsilon_s} \ln(D/r) \quad (8.80)$$

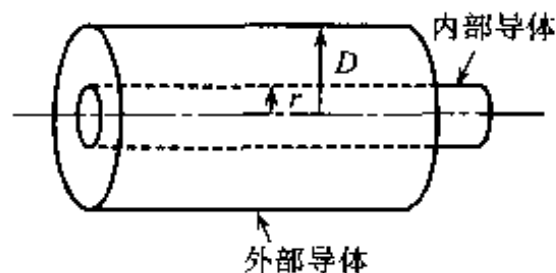


图 8.22 同轴电缆

8.6 电磁过渡现象

由雷击或整流而产生的电涌现象是电力系统的过渡现象之一。通常情况下, 电力系统的交流电压的基波为 50Hz 或 60Hz。与输电线的长度相比, 波长非常长, 因此可视为集总参数电路。但是, 在分析雷击时, 整流现象或最近盛行的电力用半导体元件的机器时, 因为波形本身发生了变化, 不

可能直接控制波形。因此,在分析过渡现象时,如果不把输电线电路当做分布参数,就不能正确把握过渡现象。

这些方法常常用来分析电涌。电力系统用的电磁过渡现象分析程序(EMTP; electromagnetic transient program)是目前使用最广泛的电涌分析程序。由于此程序的出现,棘手的分布参数电路的分析也变得简单了。

贝杰龙法

8.5节中讨论的分布参数电路的波动方程式的解为

$$e(x, t) = f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v) \quad (1)$$

$$i(x, t) = \frac{1}{Z} \{ f_1(t - x/v) + f_2(t + x/v) \} \quad (2)$$

它们与式(8.68)、式(8.69)相同。

两式可变为

$$e(x, t) + Z i(x, t) = 2 f_1(t - x/v) \quad (3)$$

$$e(x, t) - Z i(x, t) = 2 f_2(t + x/v) \quad (4)$$

式(3)表示,当 $t - x/v$ 为定值时, $e + Zi$ 也为定值。

式(4)表示,当 $t + x/v$ 为定值时, $e - Zi$ 也为定值。

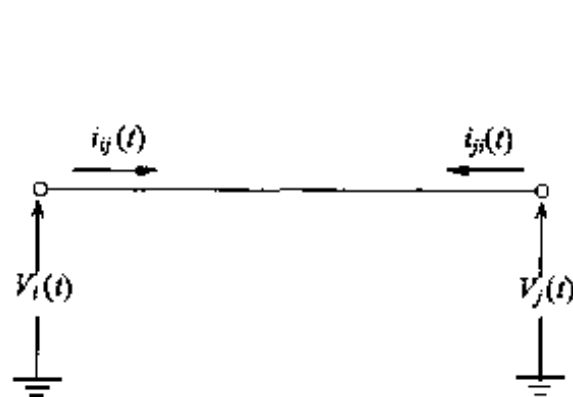


图 8.a 输电线

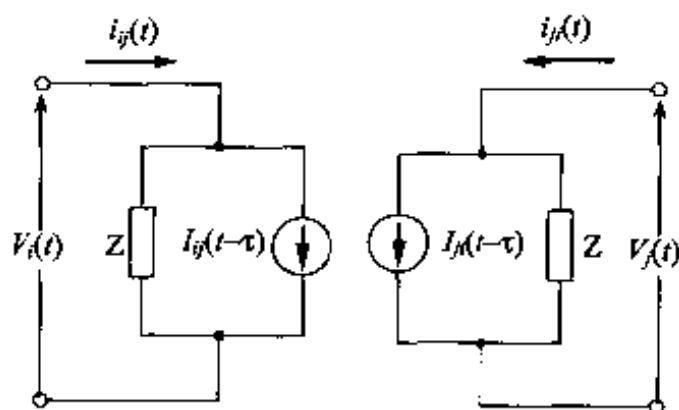


图 8.b 贝杰龙等效电路

这意味着当行波从线路的输送端传输到接受端需要时间 τ 。令图 8-a 中接收端和输出端的电压与电流分别为 $V_i(t)$ 、 $i_g(t)$ 、 $V_j(t)$ 、 $i_h(t)$, 则下式成立:

$$V_i(t - \tau) + Zi_g(t - \tau) = V_j(t) + Z(-i_h(t)) \quad (5)$$

若将上式变换为

$$I_g(t - \tau) = -\frac{1}{Z} V_j(t - \tau) - i_h(t - \tau) \quad (6)$$

$$I_h(t - \tau) = -\frac{1}{Z} V_i(t - \tau) - i_g(t - \tau) \quad (7)$$

则可求出接收端和输出端的电流为

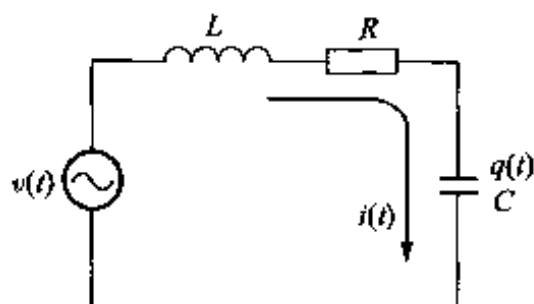
$$I_p(t) = \frac{1}{Z} V_i(t) - i_p(t - \tau) \quad (8)$$

$$I_o(t) = \frac{1}{Z} V_i(t) - i_o(t - \tau) \quad (9)$$

图 8-b 所示为 (8) 式和 (9) 式的等效电路。此电路称为贝杰龙等效电路。以贝杰龙等效电路模拟电力系统的输电线, 对电涌现象进行分析的方法, 就是所谓的贝杰龙法。它被用在 EMTP 等的数值计算程序中。

►► 练习题

习题 1



如图 8.23 所示电路, 求储存在 C 中的电荷 $q(t)$ 的微分方程式。

图 8.23

习题 2

求上题的微分方程式的拉普拉斯变换。

习题 3

如图 8.24 所示, 当 C 所充的电为 V_0 时, 开关闭合后求电路中的电流。

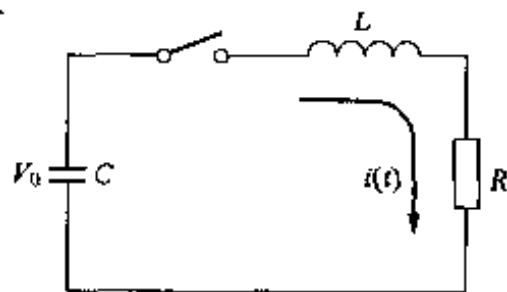


图 8.24

习题 4

在图 8.25 所示的交流电路中,求开关打开时 C 的端电压。

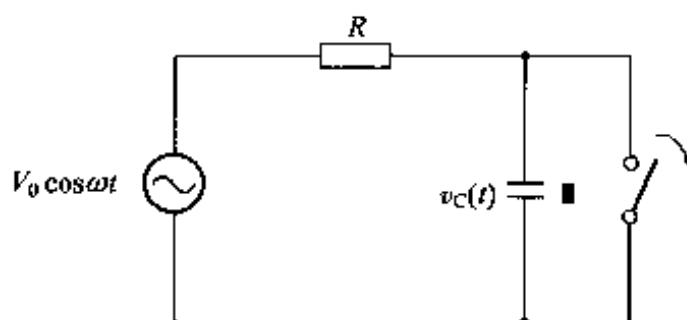


图 8.25

习题 5

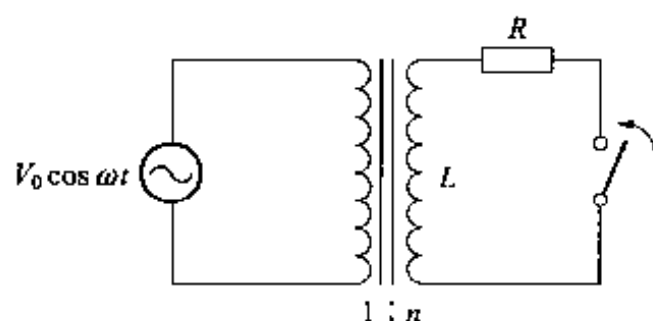


图 8.26

在图 8.26 所示的含有变压器的交流电路中,求开关闭合时流过次级端的电流(短路电流)。设变压器次级端的电阻和电感分别为 R 和 L 。

习题 6

在图 8.27 所示的带有传递函数的电路中,求施加阶跃输入时的输出响应。

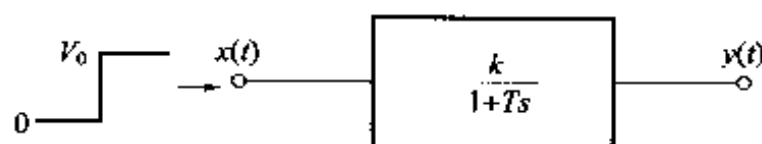


图 8.27

习题 7

在图 8.28 所示电路中,用拉普拉斯变换的形式表示开关闭合时的电流。

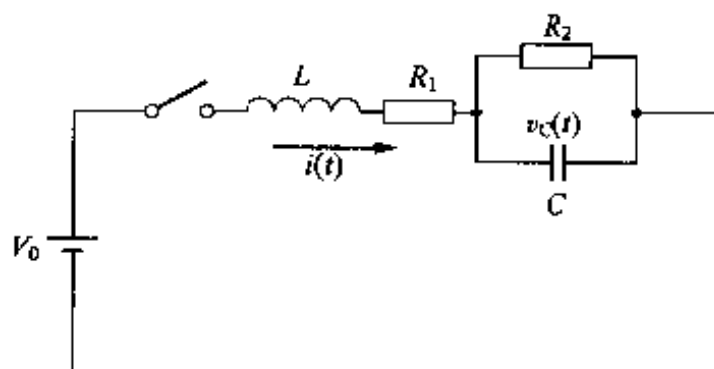


图 8.28

习题 8

求下列时间函数的拉普拉斯变换:

$$(1) 2 + 4t \quad (2) \sin \omega(t-a)$$

习题 9

通过拉普拉斯逆变换,求下列式的时间函数:

$$(1) \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} \quad (2) \frac{s+3}{(s-1)^3(s+2)}$$

习题 10

分布参数线路的特性阻抗 $Z=100\Omega$, 单位长度的电容 $C=47\text{pF}$, 求传输速度 v 及单位长度的电感 L 。

练习题解答

第 1 章

习题 1

由式(1.2)得 $P=10^3\text{ W}$

习题 2

由式(1.6)得 $W_s = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 100^2 = 5 \times 10^{-3} \text{ J}$

习题 3

由式(1.8)得 $W_s = \frac{1}{2} \times 10^{-3} \times 10^2 = 5 \times 10^{-2} \text{ J}$

习题 4

$R=7.5\Omega$

习题 5

$C=1\mu\text{F}$

习题 6

图 1.21 可变换为解图 1.1。A-B 间的总电阻为

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_4 + R_5}$$

即

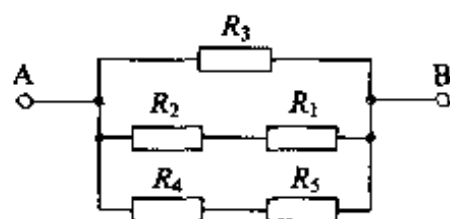
$$R_{AB} = \frac{R_3(R_1 + R_2)(R_4 + R_5)}{R_3(R_1 + R_2) + (R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5)}$$

由解图 1.2 可知, B-C 间的总电阻为

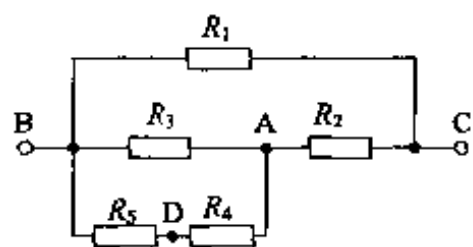
$$\frac{1}{R_{BC}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}}$$

即

$$R_{BC} = \frac{R_1 \left[R_2 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5} \right]}{R_1 + R_2 + \frac{R_3(R_4 + R_5)}{R_3 + R_4 + R_5}}$$



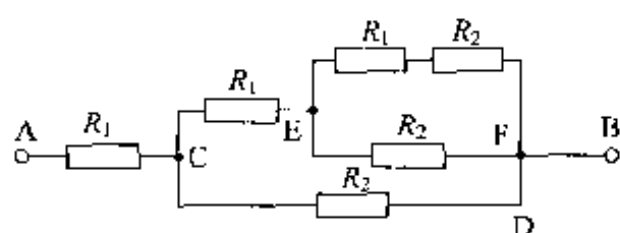
解图 1.1



解图 1.2

习题 7

由解图 1.3 可知, E-F 间的电阻为



解图 1.3

$$R_{EF} = \frac{(R_1 + R_2)R_2}{R_1 + 2R_2}$$

C-F 间的电阻为

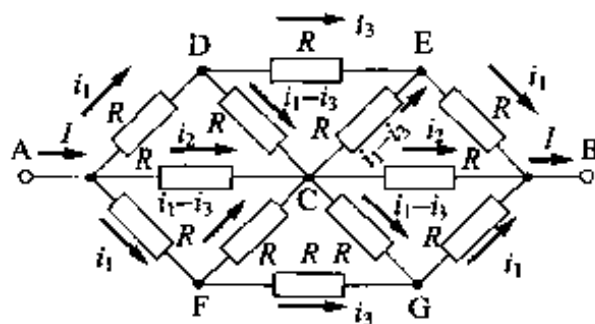
$$R_{CF} = \frac{(R_1 + R_{EF}) \cdot R_2}{R_2 + R_1 + R_{EF}}$$

因此 A-B 间的总电阻为

$$\begin{aligned} R_{AB} &= R_1 + R_{CF} \\ &= R_1 + \frac{\left(R_1 + \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1 + 2R_2}\right) \cdot R_2}{R_1 + R_2 + \frac{R_2(R_1 + R_2)}{R_1 + 2R_2}} \\ &= \frac{R_1^3 + 6R_1R_2^2 + 5R_2R_1^2 + R_2^3}{(R_1 + R_2)(3R_2 + R_1)} \end{aligned}$$

习题 8

解图 1.4 不能分解为简单的串、并联。不过,从图中可以看出,图形对于 C 点上、下、左、右对称,着眼于这一点,就可求其总电阻 R_{AB} 。即如解图 1.4 所示,可根据对称性求支路电流。因 A-D-C 间的电压降等于 A-C 间的电压降,故有



解图 1.4

$$Ri_1 + R(i_1 - i_3) = Ri_2 \cdots \textcircled{1}$$

D-C-E 间的电压降等于 D-E 间的电压降,故有

$$Ri_3 = 2R(i_1 - i_3) \cdots \textcircled{2}$$

而总电流为

$$I = 2i_1 + i_2 \cdots \textcircled{3}$$

由式①可得: $2i_1 = i_2 + i_3$, 由式②可得: $2i_1 = 3i_3$

联立式①、②、③求解,可得

$$I = 2i_1 + i_2 = \frac{3}{2}i_2 + i_2 = \frac{5}{2}i_2$$

令 A-B 间的电压为 E_{AB} , 则

$$E_{AB} = 2R \cdot i_2 = 2R \cdot \frac{2}{5}I = \frac{4}{5}RI = R_{AB} \cdot I$$

因此, 总电阻为

$$R_{AB} = \frac{4}{5} \cdot R$$

第 2 章

习题 1

(1) 由式(2.6)可知, 若令 $V_2 \leq 10V$, 则

$$V_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot 10^4 \leq 10 \quad \text{得} \quad \frac{R_1}{R_2} \geq 10^4 - 1 \approx 10^4$$

因此, 选择 R_1, R_2 时, 只要让 R_1 大于 R_2 的 10^4 就可以了。

(2) 因 R_1, R_2 的发热量为

$$P_1 = I^2 R_1, \quad P_2 = I^2 R_2$$

由于 R_1 大于 R_2 的 10^4 倍, 因此基本上是 R_1 在发热。若令 $R_1 = 100k\Omega$, 则

$$P_1 = \left(\frac{V_1}{R_1 + R_2} \right)^2 \times R_1 \approx \frac{V_1^2}{R_1} \quad \text{即} \quad P_1 = (10^4)^2 / 10^5 = 10^3 W$$

R_1 为 $10M\Omega$ 时, 它的发热量为 $P_1 = 10W$ 。因此, 应该注意的问题是: 高电阻 R_1 的发热量减少。

习题 2

如解图 2.1 所示, 确立三个闭合回路的电流, 由基尔霍夫电压定律, 可建立下列回路方程式:

$$2 \cdot I_1 + 1 \cdot (I_1 - I_2) + 3 \cdot (I_1 - I_3) = 0$$

$$3 \cdot I_2 + 4 \cdot (I_2 - I_3) + 1 \cdot (I_2 - I_1) = 0$$

$$3 \cdot (I_3 - I_1) + 4 \cdot (I_3 - I_2) = 10$$

整理后可得

$$6I_1 - I_2 - 3I_3 = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$$-I_1 + 8I_2 - 4I_3 = 0 \cdots \textcircled{2}$$

$$-3I_1 - 4I_2 + 7I_3 = 10 \cdots \textcircled{3}$$

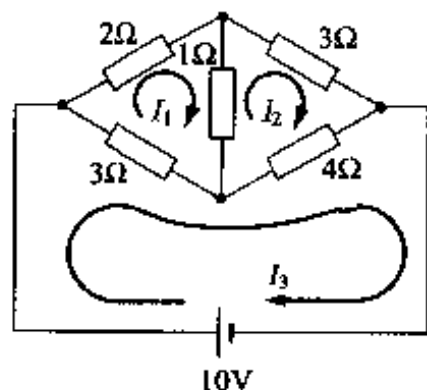
由式①得

$$I_2 = 6I_1 - 3I_3 \cdots \textcircled{4}$$

将式④代入式②得 $-I_1 + 8(6I_1 - 3I_3) - 4I_3 = 47I_1 - 28I_3 = 0$ 。因此

$$I_3 = \frac{47}{28} I_1 \cdots \textcircled{5}$$

将式⑤代入式④得



解图 2.1

$$I_2 = 6I_1 - 3\left(\frac{47}{28}\right)I_1 = \frac{27}{28} \cdot I_1 \cdots \textcircled{6}$$

将式⑥代入式③得

$$-3I_1 - 4 \cdot \left(\frac{27}{28}\right)I_1 + 7\left(\frac{47}{28}\right)I_1 = \frac{137}{28}I_1 = 10 \quad I_1 = \frac{280}{137}$$

由式⑤、⑥得

$$I_2 = \frac{270}{137}, \quad I_3 = -\frac{470}{137}$$

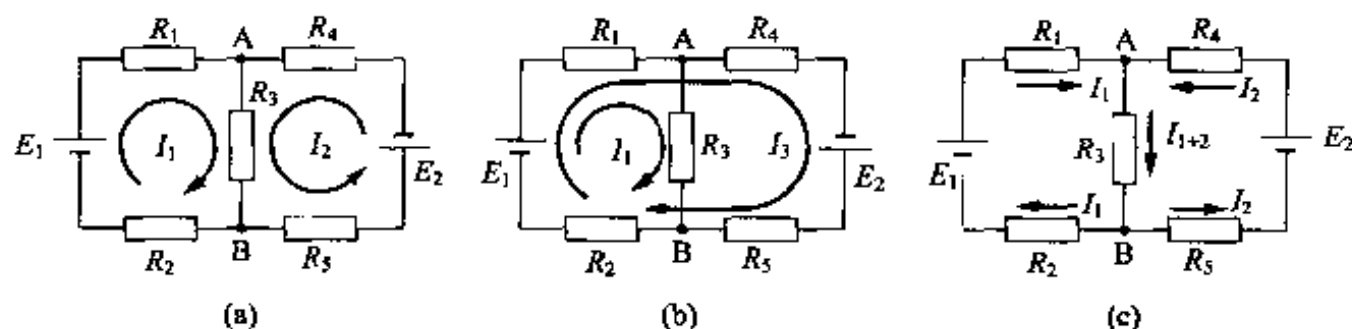
A-B 支路的电流为

$$I_{AB} = I_1 - I_2 = \frac{10}{137} \text{ A}$$

习题 3

此问题是求 A-B 支路的电流 I_{AB} ；因此，要尽可能地建立能够直接求出 A-B 支路的方程式。

解图 2.2(a)、(b)所示都为网孔电流，只是两图中 I_1 、 I_2 的设立方法不同。在解图 2.2(b)中， $I_1 = I_{AB}$ ，因此 I_{AB} 的计算比较简单。在解图 2.2(a)中，因 $I_{AB} = I_1 - I_2$ ，所以必须求出 I_1 和 I_2 。



解图 2.2

在解图 2.2(c)所示的支路电流法中，因 $I_{AB} = I_1 + I_2$ ，故与解图 2.2(a)相同。

下面采用解图 2.2(b)的计算方法。

建立回路方程式，得

$$E_1 = R_1(I_1 + I_3) + R_3 I_1 + R_2(I_1 + I_3) \cdots \textcircled{1}$$

$$E_2 = (R_4 + R_5)I_3 - R_3 I_1 \cdots \textcircled{2}$$

由式②得

$$I_3 = \frac{1}{R_4 + R_5}(E_2 + R_3 I_1) \cdots \textcircled{3}$$

将式③代入式①得

$$E_1 = R_1 I_1 + R_1 \frac{E_2}{R_4 + R_5} - \frac{R_1 R_3}{R_4 + R_5} I_1 + R_3 I_1 + R_2 I_1 + R_2 \frac{E_2}{R_4 + R_5} + R_2 \frac{R_3 I_1}{R_4 + R_5}$$

$$\begin{aligned}
 &= I_1 \left(R_1 + \frac{R_1 R_3}{R_4 + R_5} + R_3 + R_2 + \frac{R_2 R_3}{R_4 + R_5} \right) + \frac{(R_1 + R_2) E_2}{R_4 + R_5} \\
 I_1 &= \frac{E_1 - \frac{(R_1 + R_2) E_2}{R_4 + R_5}}{\left(R_1 + R_2 + R_3 + \frac{R_3 (R_1 + R_2)}{R_4 + R_5} \right)} \\
 &= \frac{(R_4 + R_5) E_1 - (R_1 + R_2) E_2}{(R_1 + R_2 + R_3)(R_4 + R_5) + R_3 (R_1 + R_2)} = I_{AB}
 \end{aligned}$$

习题 4

由欧姆定律, 可知

$$I = \frac{E}{r + R} \cdots \textcircled{1}$$

负载 R 功率为

$$P = I^2 R = \left(\frac{E}{r + R} \right)^2 \cdot R \cdots \textcircled{2}$$

最大功率为

$$\frac{dP}{dR} = R \cdot E^2 \cdot \frac{d}{dR} \left(\frac{1}{r + R} \right)^2 + \left(\frac{E}{r + R} \right)^2 \cdot \frac{dP}{dR} = \frac{(r - R) E^2}{(r + R)^3} \cdots \textcircled{3}$$

由 $dP/dR = 0$, 得 $R = r$ 。故 $P_{\max} = \frac{E^2}{4r}$

习题 5

此电路为对称电路, 因此采用支电流法计算比较方便。对于中央支路 C-D-E 来说, 由于回路对称。故无电流通过。

对闭合回路 A-F-D-C-A, 可建立如下回路方程式:

$$RI_1 = RI_2 + R(I_2 - I_3) = 2RI_2 - RI_3 \cdots \textcircled{1}$$

对闭合回路 F-D-E-H-F, 可建立如下回路方程式:

$$R(I_2 - I_3) = 2R \cdot I_3 \quad I_2 = 3I_3 \cdots \textcircled{2}$$

总电流为 I , 即

$$I = I_1 + I_2 \cdots \textcircled{3}$$

由式①、②、③得

$$I_1 = \frac{5}{8} I$$

令 A-C-B 支路上的电压降为 V_{AB} , 则

$$V_{ACB} = 2R \cdot I_1 = R_{AB} \cdot I$$

因此

$$R_{AB} = \frac{2R}{I} I_1 = \frac{2R}{I} \cdot \frac{5}{8} I = \frac{5}{4} R$$

第3章

习题1

令电压为 $E[\text{V}]$, 电流为 $I[\text{A}]$, 功率为 $P[\text{W}]$, 功率因数为 P_t , 则 $P = E \cdot I \cdot P_t$ 。而 $I = 100 / (100 \cdot 1) = 1[\text{A}]$ 为有效值。因此, 最大值为 $1 \times \sqrt{2} = 1.41 \text{ A}$

习题2

同上, 可将 $I = 100 / (100 \cdot 0.5) = 2[\text{A}]$

习题3

有电阻的线圈构成的是电阻与电感的串联电路。其阻抗 Z 为 $R + j\omega L$, 而 $|Z| = 100/10 = 10\Omega$

$$|5 + j2\pi \cdot 50 \cdot L| = 10, \quad 5^2 + 100^2 \pi^2 L^2 = 100$$

因此可得

$$L = \sqrt{75} / 100\pi \approx 27.6 \times 10^{-3} \text{ H}$$

习题4

- ①× 因为电感的感抗与频率成正比, 因此, 阻抗为 60Hz 时的电流小。
- ②○ 阻抗中电阻分量越大, 功率因数越大。
- ③× 因为功率等于电流的平方乘以电阻值, 所以 50Hz 的电流的功率大。
- ④× 电流不同, 功率也不同。
- ⑤○ 电感不消耗功率。

习题5

应用戴维宁定理, 计算比较简单。

令 $R_1 + j\omega L_1 = Z_1, R_2 + j\omega L_2 = Z_2, R_3 + j\omega L_3 = Z_3$, 则 Z_3 左侧的人端阻抗 Z 为

$$Z = Z_1 Z_2 / (Z_1 + Z_2)$$

在未接入 Z_3 前, Z_2 的端电压 $\dot{E}_{20} = \dot{E} Z_2 / (Z_1 + Z_2)$ 。因此, Z_3 上的电流为 $\dot{I}_3 = \dot{E}_{20} / (Z + Z_3) = \dot{E} Z_2 / (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)$

Z_3 上的端电压为 $\dot{E}_3 = \dot{I}_3 Z_3$

$$\dot{E}_3 = \dot{E} Z_2 Z_3 / (Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1)$$

功率可由 $|\dot{I}_3|^2 R_3$ 求出。

后面的计算中, 只要将 Z 变回到 $R + j\omega L$ 的形式即可, 此处从略。

第4章

习题1

如解图 4.1 所示, 取出一个单相。令负载的阻抗大小为 Z , 因线电流为 10A , 故

$$I = \frac{6000/\sqrt{3}}{Z} = 10 \text{ A}$$

即

$$Z = \sqrt{R^2 + X^2} = 600/\sqrt{3} \Omega$$

电路中消耗的功率 $P = 3I^2 R = 3 \times 10^2 \times R = 60 \times 10^3 \text{ W}$

电路中的电阻 $R = 60 \times 10^3 / (3 \times 10^2) = 200 \Omega$

电抗 $X = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(600/\sqrt{3})^2 - 200^2} \approx 283 \Omega$

另解 由三相功率 $P = \sqrt{3}VI\cos\phi = \sqrt{3} \times 6000 \times 10 \times \cos\phi = 60 \times 10^3 \text{ W}$

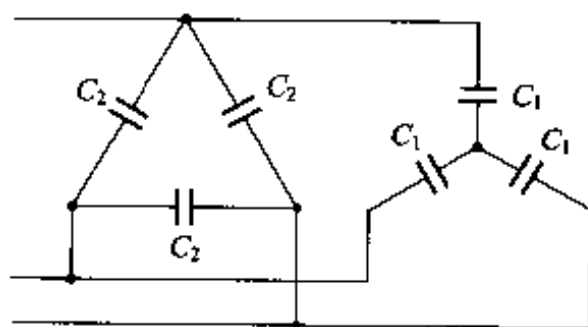
可知 $\cos\phi = 1/\sqrt{3}$, $Z = (V/\sqrt{3})/I = 600/\sqrt{3} \Omega$

RX 串联电路的功率因数 $\cos\phi = R/Z$ 。因此 $R = Z\cos\phi = 200 \Omega$

电抗为 $X = \sqrt{Z^2 - R^2} \approx 283 \Omega$

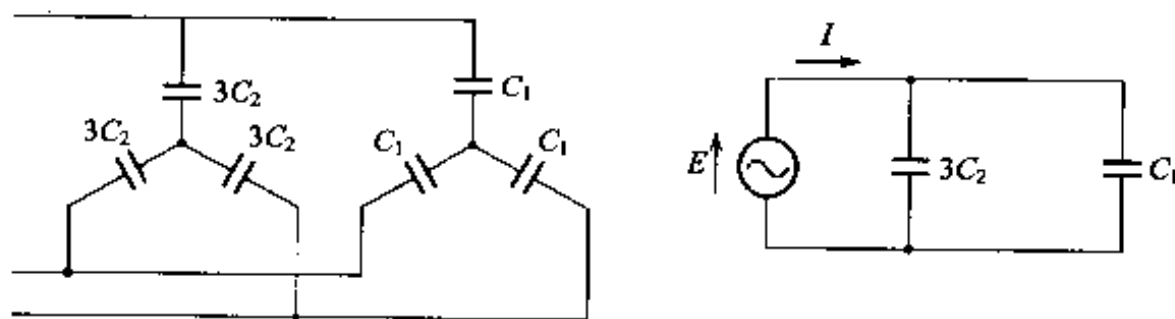
习题 2

此题可变换为解图 4.2 所示的电路。



解图 4.2

将 Δ 形接法的静电容量 C_2 变换为 Y 形连接后,如解图 4.3 所示。设 C_2 的阻抗为 Z_2 ,则 Δ - Y 变换后,阻抗为 $Z_2/3$ 。即 $Z_2/3 = 1/(j\omega 3C_2)$,静电容量为 $3C_2$ 。



解图 4.3

如图所示,取出一个单相,因 C_1 与 $3C_2$ 并联,故总静电容量为: $C_1 + 3C_2$ 。而相电压为 E ,故线电流为

$$I = \omega(C_1 + 3C_2)E$$

习题 3

(1) 线电压 V_{ab} 为 $200\sqrt{3}\text{V}$

一相的阻抗大小为

$$Z = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\Omega$$

a-b 间的相电流 I_{ab} 为

$$I_{ab} = 200\sqrt{3}/50 = 4\sqrt{3} = 6.93\text{A}$$

(2) $\triangle$ 连接时, (线电流) $= \sqrt{3} \times$ (相电流), 因此

$$\text{线电流 } I_a = \sqrt{3}I = \sqrt{3} \times 4\sqrt{3} = 12\text{A}$$

(3) 只有电阻消耗功率, 因此, 三相功率可由 $P = 3I_{ab}^2 R$ 求出, 即

$$P = 3I_{ab}^2 R = 3 \times (4\sqrt{3})^2 \times 30 = 4320\text{W}$$

另外, 也可由三相功率的表达式 $P = \sqrt{3}VI\cos\phi$ 求出 $\cos\phi = R/Z = 30/50 = 0.6$ 。故

$$P = \sqrt{3} \times 200\sqrt{3} \times 12 \times 0.6 = 4320\text{W}$$

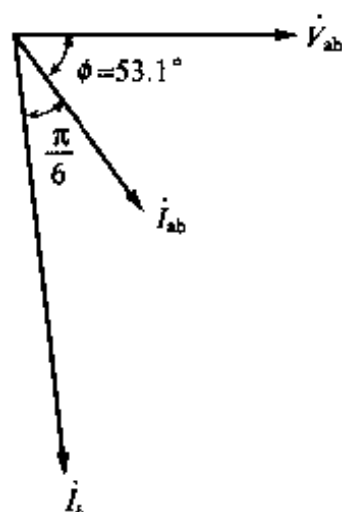
(4) 相电流 I_{ab} 的相位落后于负载上线电压 $\dot{V}_{ab}$ 的相位角为功率因数角 ϕ 。

$$\text{功率因数角 } \phi = \tan^{-1}(X/R) = \tan^{-1}(40/30) = 53.1^\circ$$

$\triangle$ 连接时, 线电流 $\dot{I}_a$ 落后于相电流 $\dot{I}_{ab}$ 的 $\pi/6 [\text{rad}]$

($=30^\circ$)。因此, $\dot{V}_{ab}$ 与 $\dot{I}_a$ 的相位差 θ 为

$$\theta = 53.1^\circ + 30^\circ = 83.1^\circ$$



解图 4.4

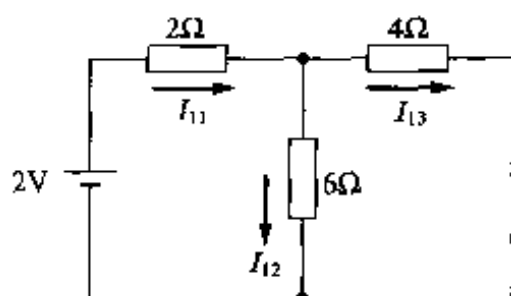
第 5 章

习题 1

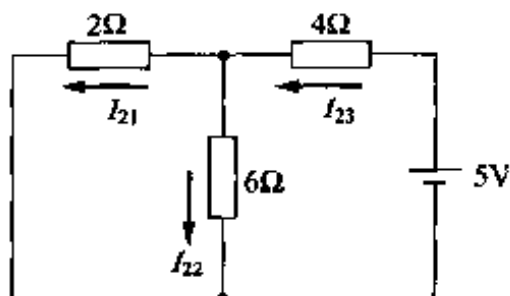
将 E_1 单独作用下的 I_{11} 、 I_{12} 、 I_{13} 与 E_2 单独作用下的 I_{21} 、 I_{22} 、 I_{23} 相加, 就可求出 I_1 、 I_2 、 I_3 的大小。

$$I_{11} = 2\text{V} \times \frac{1}{2\Omega + \frac{6\Omega \cdot 4\Omega}{6\Omega + 4\Omega}} = \frac{2\text{V}}{2 + 2.4} = 0.454\text{A}$$

$$I_{12} = I_{11} \times \frac{4}{6 + 4} = 0.182\text{A}$$



解图 5.1



解图 5.2

$$I_{13} = I_{11} \times \frac{6}{6+4} = 0.272\text{A}$$

$$I_{23} = 5\text{V} \times \frac{1}{4\Omega + \frac{6 \times 2}{6\Omega + 2\Omega}} = \frac{5\text{V}}{4+1.5} = 0.91\text{A}$$

$$I_{22} = I_{23} \times \frac{2\Omega}{6\Omega + 2\Omega} = 0.227\text{A}$$

$$I_{21} = I_{23} \times \frac{6\Omega}{6\Omega + 2\Omega} = 0.682\text{A}$$

$$I_1 = I_{11} - I_{21} = 0.454\text{A} - 0.682\text{A} = -0.228\text{A}$$

$$I_2 = I_{12} + I_{22} = 0.182\text{A} + 0.227\text{A} = 0.409\text{A}$$

$$I_3 = -I_{13} + I_{23} = -0.272\text{A} + 0.9\text{A} = 0.628\text{A}$$

习题 2

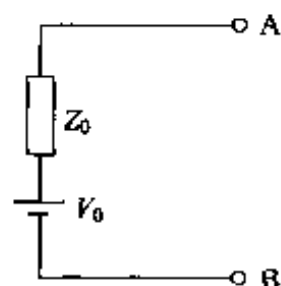
将 V_x 短路, 因 Z_1 与 Z_4 并联 Z_2 与 Z_3 并联, 两者再串联, 所以

$$Z_0 = \frac{Z_1 \cdot Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 \cdot Z_3}{Z_2 + Z_3}$$

V_0 等于 Z_4 的电压与 Z_3 电压之差, 即

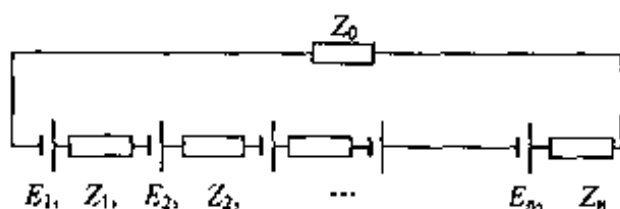
$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} V_E - \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} V_E \\ &= \frac{Z_2 \cdot Z_4 - Z_1 \cdot Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} V_E \end{aligned}$$

解图 5.3 就是所求戴维宁等效电路。



解图 5.3

习题 3



解图 5.4

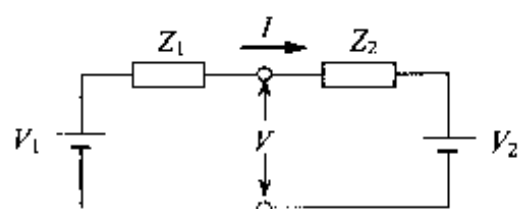
从解图 5.4 所示的等效电路, 可得

$$I = \frac{E_1 + E_2 + \dots + E_n}{(Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n) + Z_0}$$

第 i 次电路的端电压为

$$V_i = E_i - I \times Z_i$$

习题 4



解图 5.5

解图 5.5 所示为戴维宁等效电路。设电压为 V , 电流为 I , 方向为 $V_1 \rightarrow V_2$, 则

$$\begin{aligned} \text{所以 } V_1 - V_2 &= (Z_1 + Z_2)I \\ I &= (V_1 - V_2) / (Z_1 + Z_2) \end{aligned}$$

由 $V_1 - V = Z_1 I$ 可知

$$\begin{aligned} V &= V_1 - Z_1 I = V_1 - Z_1 \cdot \frac{V_1 - V_2}{Z_1 + Z_2} \\ &= \frac{V_1 Z_2 + V_2 Z_1}{Z_1 + Z_2} \end{aligned}$$

习题 5

由戴维宁定理, 求 E_i 、 Z_i 为

$$\begin{aligned} E_i &= \left(\frac{Z_4}{Z_1 + Z_4} - \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3} \right) E - \frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} E \\ Z_i &= \frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \end{aligned}$$

因此, 流过 Z_5 的电流为

$$I_5 = \frac{E_i}{Z_i + Z_5} = \frac{\frac{Z_2 Z_4 - Z_1 Z_3}{(Z_1 + Z_4)(Z_2 + Z_3)} E}{\frac{Z_1 Z_4}{Z_1 + Z_4} + \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} + Z_5}$$

习题 6

R 端看到的电源阻抗为

$$Z_i = \frac{(r + jx)(-jX_C)}{(r + jx) + (-jX_C)} = \frac{x \cdot X_C - jrX_C}{r + j(x - X_C)}$$

本题与 5.6 节中“负载的电阻可变”内容相符, 因此只要将上式 Z_i 表示为电阻分量和电抗分量, 求出与其绝对值相同大小的外阻抗, 就可得到最大功率。

令 $R = \sqrt{R_g^2 + (X_g + X)^2}$ (注意 $X=0$)。则

$$R_g + j(X_g + X) = \frac{xX_C}{\sqrt{r^2 + (x - X_C)^2}} - j \frac{rX_C}{\sqrt{r^2 + (x - X_C)^2}}$$

其解为

$$R = \frac{X_C \sqrt{x^2 + r^2}}{\sqrt{r^2 + (x - X_C)^2}}$$

习题 7

解 1 $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \tan^{-1}(4/3) = 53.1^\circ$

由图(a), 得 $I = 50 \angle 0^\circ / 5 \angle 53.1^\circ = 10 \angle (-53.1^\circ)$

由图(b), 得 $\sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2}$, $\tan^{-1}(5/5) = 45^\circ$

$$I' = 50 \angle 0^\circ / (5\sqrt{2} \angle 45^\circ) = \frac{10}{\sqrt{2}} \angle (-45^\circ)$$

所以

$$\Delta I = I' - I = 7.07 \angle -45^\circ - 10 \angle -53.1^\circ$$

$$= (5 - j5) - (6 - j8) = -1 + j3 = 3.16 \angle 108.45^\circ$$

解2 由补偿定理可得式(5.18),

$$\begin{aligned} \Delta I &= \frac{-V}{Z} \cdot \frac{\Delta Z}{Z + \Delta Z} = -I \cdot \frac{\Delta Z}{Z + \Delta Z} \\ &= -10 \angle (-53.1^\circ) \cdot \frac{2 + j1}{5 + j5} \\ &= \frac{-10 \angle (-53.1^\circ) \cdot \sqrt{5} \angle 26.6^\circ}{5\sqrt{2} \angle 45^\circ} = \frac{-22.36}{5 \cdot \sqrt{2}} \angle \frac{(-53.1 + 26.6)}{45} \\ &= -3.16 \angle -71.5^\circ = 3.16 \angle 180^\circ - 71.5^\circ = 3.16 \angle 108.5^\circ \end{aligned}$$

解1、解2 解法不同, 但结果一致。

第6章

习题1

$$\text{有效值} = \sqrt{15^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{225 + 64 + 4} = 17.1 \text{ A}$$

$$\text{平均值} = 15 \text{ A}$$

习题2

基波的大小和相位差为

$$\frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{3^2 + 3^2}} = \frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{100}{3} \quad \text{相位差} = \theta_1 = \tan^{-1}(3/3) = 45^\circ$$

三次谐波的大小和相位差为

$$\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{3^2 + (3 \times 3)^2}} = \frac{30\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{\sqrt{10}} = 4.47 \text{ A}$$

$$\text{相位差} = \theta_3 = \tan^{-1}(3 \times 3/3) = 71.6^\circ$$

$$i = \frac{100}{3} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + 4.47 \cdot \sin(3\omega t - \theta_3)$$

$$I = \sqrt{\left(\frac{100}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(4.47 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 23.77 \text{ A}$$

$$\text{有功功率} = V_{1\text{rms}} \cdot I_{1\text{rms}} \cdot \cos\theta_1 + V_{3\text{rms}} \cdot I_{3\text{rms}} \cdot \cos\theta_3$$

$$= \left(100 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{100}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$+ \left(\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(4.77 \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{10}} \right) \\ = 1665 + 32 = 1697 \text{ W}$$

$$\begin{aligned} \text{视在功率} &= V \cdot I = \sqrt{\left(\frac{100\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{30\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \right)^2} I \\ &= \sqrt{100^2 + (30)^2} \cdot 23.77 \text{ A} = 100 \sqrt{1 + (0.3)^2} \cdot 23.77 \text{ A} \\ &= 100 \times 1.044 \cdot 23.77 = 2482 \text{ W} \end{aligned}$$

$$\text{功率因数} = \text{有功功率} / \text{视在功率} = 1697 \text{ W} / 2482 \text{ W} = 0.684$$

习题 3

由 L 上的电流

$$i = \frac{V_1}{\omega L} \sin(\omega t - \theta_1) + \frac{V_3}{3\omega L} \sin(3\omega t - \phi - \theta_3)$$

可知, (A2) 的读数为

$$\sqrt{\left(\frac{V_1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\omega L} \right)^2 + \left(\frac{V_3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{3\omega L} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}\omega L} \sqrt{V_1^2 + \frac{1}{9}V_3^2}$$

由 C 上的电流

$$i = \omega C V_1 \sin(\omega t + \theta_1') + 3\omega C V_3 \sin(3\omega t - \phi + \theta_2')$$

可知, (A1) 的读数为

$$\sqrt{\left(\frac{\omega C V_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{3\omega C V_3}{\sqrt{2}} \right)^2} = \frac{\omega C}{\sqrt{2}} \sqrt{V_1^2 + 9V_3^2}$$

流过 (A3) 的电流为

$$i = \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) V_1 \sin(\omega t - \theta_1'') + \left(3\omega C - \frac{1}{3\omega L} \right) V_3 \sin(3\omega t - \phi + \theta_3'')$$

因此, (A3) 的读数为

$$\begin{aligned} &\sqrt{\left(\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \frac{V_1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\left(3\omega C - \frac{1}{3\omega L} \right) \frac{V_3}{\sqrt{2}} \right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 V_1^2 + \left(3\omega C - \frac{1}{3\omega L} \right)^2 V_3^2} \end{aligned}$$

$\theta_1, \theta_3, \theta_1', \theta_3', \theta_1'', \theta_3''$ 表示流过 L、C、L+C 上的电流与电压的各次谐波的相位差。

习题 4

(1) 瞬时电压的表达式为

$$\begin{aligned} v &= L(di/dt) + Ri + \frac{1}{C} \int i dt \\ &= \frac{I_1}{\sqrt{2}} \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \sin(\omega t - \theta_1) \end{aligned}$$

$$+ \frac{I_2}{\sqrt{2}} \sqrt{R^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)^2} \sin(2\omega t + \phi_2 - \theta_2)$$

$$\text{其中 } \theta_1 = \tan^{-1} \left(\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) / R \right) \quad \theta_2 = \tan^{-1} \left(\left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C} \right) / R \right)$$

(2)

$$V = \sqrt{\left(R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2\right) I_1^2 + \left(R^2 + \left(2\omega L - \frac{1}{2\omega C}\right)^2\right) I_2^2}$$

注意: I_1 、 I_2 为有效值, 不是最大值。

习题 5

因 $f(\theta) = f(-\theta)$, 故其为偶函数。因此它只由直流分量余弦项的级数构成。

(1) 直流分量。将 $0 \sim 2\pi$ 的波形表示为 $0 \sim \pi$ 、 $\pi \sim 2\pi$ 的 2 个表达式, 则

$$0 \sim \pi: f(\theta) = -\frac{V}{\pi}(\pi - \theta) \quad \pi \sim 2\pi: f(\theta) = \frac{V}{\pi}(\theta - \pi)$$

因其为偶函数, 故

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{V}{\pi}(\pi - \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{V}{\pi} \left(\pi\theta - \frac{1}{2}\theta^2 \right) \right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{V}{\pi} \cdot \frac{\pi^2}{2} \right] = \frac{V}{2} \end{aligned}$$

(2) 由式(6.24)得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\theta) \cdot \cos n\theta d\theta = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{V}{\pi}(\pi - \theta) \cdot \cos n\theta d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(V \cos n\theta d\theta - \frac{V}{\pi} \theta \cos n\theta \right) d\theta \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{V}{n} \cdot \sin n\theta - \frac{V}{\pi} \left(\frac{1}{n^2} \cos n\theta + \frac{\theta}{n} \sin n\theta \right) \right]_0^\pi \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{V}{n} \sin n\pi - \frac{V}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos n\pi - \frac{\pi}{n} \cdot \sin n\pi \right] - \frac{2}{\pi} \left[-\frac{V}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \right] \end{aligned}$$

因 $\sin n\pi = 0$, 故

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left(-\frac{V}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} \cos n\pi \right) + \frac{2}{\pi} \cdot \frac{V}{\pi} \cdot \frac{1}{n^2} = \frac{2V}{\pi^2 n^2} \cdot (1 - \cos n\pi)$$

$$n=1, 3, \dots \text{时} \quad a_n = \frac{2V}{\pi^2 n^2} \cdot 2 = \frac{4V}{\pi^2 n^2} \quad (n=1, 3, \dots)$$

$$n=2, 4, \dots \text{时} \quad a_n = 0$$

由此可知,

$$f(\theta) = \left(\frac{V}{2} + \frac{4V}{(\pi n)^2} \cdot \cos n\theta \right) \quad (n=1, 3, 5, \dots)$$

习题 6

(1) 有效值为 $\sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (I \sin \theta)^2 d\theta} = I/\sqrt{2} = 0.707I$ (可认为是波高值为 I 的正弦

波)

(2) 如式(6.35)所示,各高次谐波的次数可表示为

$$f(\theta) = \frac{2}{\pi} I \left\{ 1 - \frac{2\cos(2\theta)}{1 \cdot 3} - \frac{2\cos(4\theta)}{3 \cdot 5} - \frac{2\cos(6\theta)}{5 \cdot 7} - \frac{2\cos(8\theta)}{7 \cdot 9} - \frac{2\cos(10\theta)}{9 \cdot 11} \dots \right\}$$

因此,各高次谐波成分的有效值为

$$n=2: \frac{2}{\pi} I \cdot \frac{2}{1 \cdot 3} / \sqrt{2} = \frac{4I}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3\pi} I = 0.3003I$$

$$n=4: \frac{2}{\pi} I \cdot \frac{2}{3 \cdot 5} / \sqrt{2} = \frac{4I}{15\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{15\pi} I = 0.0601I$$

$$n=6: \frac{2}{\pi} I \cdot \frac{2}{5 \cdot 7} / \sqrt{2} = \frac{4I}{35\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{35\pi} I = 0.0257I$$

$$n=8: \frac{2}{\pi} I \cdot \frac{2}{7 \cdot 9} / \sqrt{2} = \frac{4I}{63\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{63\pi} I = 0.0143I$$

$$n=10: \frac{2}{\pi} I \cdot \frac{2}{9 \cdot 11} / \sqrt{2} = \frac{4I}{99\pi} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2\sqrt{2}}{99\pi} I = 0.0091I$$

由以上的计算可知,各高次谐波与有效值的比率为

$$n=2: 42.5\% \quad n=4: 8.5\% \quad n=6: 3.64\%$$

$$n=8: 2.02\% \quad n=10: 1.29\%$$

第 7 章

习题 1

$$h_{11}(h_{ie}) = \left(\frac{V_1}{I_1} \right)_{V_2=0} = 5k\Omega, \quad h_{21}(h_{fe}) = \left(\frac{I_2}{I_1} \right)_{V_2=0} = 100$$

习题 2

$$\dot{V}_1 = \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2} \right) \dot{V}_2 + Z_1 \dot{I}_2 = 142e^{j3.22} kV$$

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{Z_2} \dot{V}_2 + \dot{I}_2 = 2kA$$

第8章

习题1

由图可知

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = v(t)$$

将电流与电荷的关系式

$$\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

代入上式,可得到 q 的微分方程式

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = v(t), \quad \frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

习题2

上题两微分方程的拉普拉斯变换为

$$Ls^2 Q(s) + RsQ(s) + \frac{1}{C}Q(s) = V(s), \quad sQ(s) = I(s)$$

习题3

题1为 C 在未充电状态下,电源电压为0,过渡状态时的特性方程式与题1、2相同。微分方程式为

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}q(t) = -V_0, \quad \frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

求关于 q 的微分方程式,则有

$$L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{C}q(t) = -V_0, \quad \frac{dq(t)}{dt} = i(t)$$

对上式进行拉氏变换,求关于电流的方程式,则有

$$s^2 I(s) + \frac{R}{L}sI(s) + \frac{1}{LC}I(s) = 0$$

下式为特性方程

$$s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0, \quad s = -\frac{\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}}{2}$$

(a) 当 $\frac{R}{L} > 2\sqrt{\frac{1}{LC}}$ 时,两根都为实数, $\alpha = \frac{R}{2L}$, $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4\frac{1}{LC}}$, 则

$$i(t) = -V_0 \frac{C}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} \{e^{(-\alpha+\beta)t} - e^{(-\alpha-\beta)t}\}$$

为单调递减函数。

(b) 当 $\frac{R}{L} = 2\sqrt{\frac{1}{LC}}$ 时为重根, $\alpha = \frac{R}{2L}$, 则

$$i(t) = -CV_0 te^{-\alpha t}$$

为单调递减函数。

$$(c) \frac{R}{L} < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \text{ 时, } \alpha = \frac{R}{2L}, \beta = \frac{1}{2}\sqrt{4\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2}, \text{ 则}$$

$$i(t) = -V_0 \frac{2C}{\sqrt{(RC)^2 - 4LC}} e^{-\alpha t} \sin \beta t$$

为衰减振荡。

习题 4

令 $t=0$, 打开开关时 C 的端电压为 $v_c(t)$, 则微分方程为

$$Ri(t) + v_c(t) = V_0 \cos \omega t \quad C \frac{dv_c(t)}{dt} = i(t)$$

关于 $v_c(t)$ 的微分方程式为

$$RC \frac{dv_c(t)}{dt} + v_c(t) = V_0 \cos \omega t$$

其拉氏变换为

$$sRCV_c(s) + V_c(s) = V_0 \frac{s}{s^2 + \omega^2}, \quad V_c(s) = \frac{V_0}{RC} \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

变回为时间函数, 则

$$v_c(t) = A_0 \cos(\omega t + \theta_0) - A_0 \cos \theta_0 e^{-(1/RC)t}$$

$$A_0 = \frac{V_0}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}, \quad \theta_0 = \tan^{-1}(RC)$$

这是电气电路中遮断器的过渡恢复电压。

习题 5

闭合开关后的电路方程式为

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = nV_0 \cos \omega t$$

其解为

$$i(t) = A_0 \cos(\omega t - \theta_0) - A_0 \cos \theta_0 e^{-(R/L)t}$$

其中

$$A_0 = \frac{nV_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}, \quad \theta_0 = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R}$$

这是变压器次级端的短路电流, 电阻分量越小, 直流分量越小。

习题 6

输入 $x(t)$ 的拉氏变换为

$$X(s) = \frac{V_0}{s}$$

传递函数为

$$H(s) = \frac{K}{1 + Ts}$$

因此,输出为

$$Y(s) = \frac{K}{1 + Ts} \frac{V_0}{s}$$

可展开为

$$Y(s) = KV_0 \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{T}} \right]$$

变回到时间函数,则

$$y(t) = KV_0 (1 - e^{-(1/T)t})$$

习题 7

微分方程式为

$$i(t) = C \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{v_c(t)}{R_2}, \quad L \frac{di(t)}{dt} + R_1 i(t) + v_c(t) = V_0$$

其拉氏变换为

$$I(s) = sCV(s) + \frac{V(s)}{R_2}$$

$$sLI(s) + R_1 I(s) + V(s) = \frac{V_0}{s}$$

由上面两式,可得出

$$I(s) = \frac{1}{sL + R_1 + \frac{1}{sC + \frac{1}{R_2}}} \frac{V_0}{s}$$

上式可变形为

$$I(s) = \frac{\frac{1}{L} \left(s + \frac{1}{R_2 C} \right)}{\left(s + \frac{R_1}{L} \right) \left(s + \frac{1}{R_2 C} \right) + \frac{1}{LC}} \frac{V_0}{s}$$

变换回时间函数后,可求出电路的过渡响应。

此特性方程式为二次函数;与题 3 同样,可通过对特性方程式的根的分析,得出是否为递减函数,或是边振动边减小的过渡特性。

习题 8

$$(a) \quad \mathcal{L}[2 + 4t] = 2\mathcal{L}[1] + 4\mathcal{L}[t] = \frac{2}{s} + \frac{4}{s^2}$$

$$(b) \quad \mathcal{L}[\sin \omega(t-a)] = \frac{\omega \cos \omega a - s \sin \omega a}{s^2 + \omega^2}$$

习题 9

$$(a) \quad F(s) = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2}, \quad f(t) = e^{-t} + e^{-2t}$$

$$(b) \quad F(s) = \frac{s+3}{(s-1)^3(s+2)} = \frac{4}{3(s-1)^3} - \frac{1}{9(s-1)^2} + \frac{1}{27(s-1)} - \frac{1}{27(s+2)}$$

$$f(t) = \frac{2}{3}e^{-t}t^2 - \frac{1}{9}e^{-t}t + \frac{1}{27}e^{-t} - \frac{1}{27}e^{-2t}$$

习题 10

特性阻抗为

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

由 $Z=100, C=47 \times 10^{-12}$, 可得

$$L = 100^2 \times 47 \times 10^{-12} = 0.47 \times 10^{-6} \text{ H/m} = 0.47 \mu\text{H/m}$$

传递速度为

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{0.47 \times 10^{-6} \times 47 \times 10^{-12}}} = \frac{1}{\sqrt{47^2 \times 10^{-20}}} = 2.13 \times 10^8 \text{ m/s}$$

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]

书名 = 2 1 世纪电子电气工程师系列 电工电路

作者 =

页数 = 2 0 0

S S 号 = 0

出版日期 =